

Das Landau-Montelsche Problem für Entwicklungen nach Polynomsystemen

von
Gerhard Schmeißer
aus **Selb/Ofr.**

1967



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41533917_0031

Das Landau-Montelsche Problem für Entwicklungen nach Polynomsystemen

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades



vorgelegt von

Gerhard Schmeißer

aus Selb/Ofr.

Erlangen 1967

Als Dissertation genehmigt von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg.



Tag der mündlichen Prüfung: 19.7.1967

Dekan: Professor Dr. K. Brodersen

Erstberichterstatter: Professor Dr. W. Specht

Zweitberichterstatter: Professor Dr. H. Bauer

Inhaltsverzeichnis
=====

	Seite
Einleitung	II - IV
Bezeichnungen und Definitionen	1
<u>I. Polynomsysteme von schwachem Wachstum</u>	
1. Globale Aussagen mittels lokaler Wachstumseigenschaften	3
2. Wachstumskriterien und - abschätzungen	9
3. Beispiele	15
4. Nullstellenverteilung	18
5. Orthogonale Polynome über der reellen Geraden	21
<u>II. Das Landau - Montelsche Problem</u>	
6. Das van Vlecksche Problem	27
7. Das Landau - Montelsche Problem	32
8. Vergleich mit Ergebnissen von MARDEN	42
9. Anwendungen auf ein Problem von BIERNACKI	48
Fußnoten	62
Literatur	64

Einleitung

In der Analytischen Theorie der Polynome behandelt man unter anderem die Aufgabe, mit Hilfe der Koeffizienten der Taylor-Entwicklung eines Polynoms, Aussagen über die Lage seiner Nullstellen zu machen. In der neueren Literatur wurde mehrfach auf die Bedeutung derartiger Probleme für andere Darstellungen eines Polynoms hingewiesen. In einer Reihe von Arbeiten haben P. TURÁN und W. SPECHT ¹⁾ gezeigt, daß zu vielen bekannten Sätzen analoge Aussagen bestehen, wenn man Entwicklungen nach einem orthogonalen Polynomsystem zugrunde legt.

Kein befriedigendes Ergebnis wurde jedoch für ein entsprechendes Landau - Montelsches Problem bekannt. Während man sich bei allen anderen Problemen schon rein qualitativ überlegt, daß die Sätze ihrer Struktur nach erhalten bleiben, wenn man anstelle von z^v der Taylor-Entwicklung ein anderes Polynom vom Grade v setzt, dessen Nullstellen in einer hinreichend kleinen Umgebung des Nullpunkts liegen, so kann man dies für das Landau - Montelsche Problem, das vom Grad unabhängige Schranken verlangt, nicht ohne weiteres sagen. Man fragt sich, ob dem Landau - Montelschen Problem ein Phänomen zugrunde liegt, das einzig und allein bei der Taylor-Entwicklung auftritt. Alle in der Literatur angegebenen Beweise nutzen jedenfalls sehr die speziellen Eigenschaften der Taylor-Entwicklung aus.

¹⁾ Fußnoten: siehe Seite 62 f.

In dieser Arbeit wird gezeigt, daß das Landau - Montel-sche Problem in seiner vollen Allgemeinheit noch gültig ist, wenn man Entwicklungen nach Polynomen eines sog. Systems von schwachem Wachstum (SW-System) zugrunde legt. Die Klasse der SW-Systeme umfaßt dabei die Systeme von Polynomen mit dem Betrage nach beschränkten Nullstellen.

Zunächst beschäftigen wir uns in einem ersten Teil mit SW-Systemen. In den ersten beiden Abschnitten geben wir Kriterien für SW-Systeme an und zeigen, wie man die wichtigsten Eigenschaften eines solchen Systems im wesentlichen durch zwei Konstanten kennzeichnen kann. Der Abschnitt 3 bringt Beispiele. Im Abschnitt 4 untersuchen wir, soweit für spätere Zwecke erforderlich, die Nullstellenverteilung von Polynomen aus SW-Systemen. Schließlich widmen wir uns im Abschnitt 5 den orthogonalen Polynomsystemen über der reellen Geraden.

Im zweiten Teil zeigen wir zunächst (Abschnitt 6), daß das van Vleck'sche Problem für ein beliebiges Polynomsystem stets lösbar ist. Aus diesem Ergebnis gewinnen wir für Entwicklungen nach SW-Systemen eine quantitative Lösung des Landau - Montelschen Problems (Abschnitt 7). Eine von MONTTEL und BALLIEU angegebene Erweiterung des Landau - Montelschen Problems, für die bisher nur die Existenz von Schranken bekannt war, ergibt sich als Spezialfall. Im Abschnitt 8 vergleichen wir im Falle der Taylor-Entwicklung mit einigen bekannten Ergebnissen. Schließlich können wir in Abschnitt 9 ein Problem von BIERNACKI weitgehend klären und gewinnen daraus quantitative Aussagen zu einem bekannten Satz von DIEU-

DONNE sowie Ergebnisse, die in den Ideenkreis des Lemmas von KAKEYA und der Kompositionssätze führen.

Es sei zum Schluß vermerkt, daß man zwar mit den hier verwendeten Methoden zu einigen ungelösten oder nur qualitativ gelösten Problemen der Analytischen Theorie der Polynome Schranken angeben kann, jedoch erweisen sich diese Schranken in bekannten Spezialfällen häufig als weniger scharf.

Herrn Prof. Dr. W. Specht danke ich für Anregungen und Ratschläge zu dieser Arbeit.

Bezeichnungen und Definitionen

Alle in dieser Arbeit vorkommenden Polynome seien aus dem Polynomring $\mathbb{C}[z]$ über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Ebenso sollen Argument- und Wertebereich von Funktionen stets in $\mathbb{C}$ liegen.

Ist $f(t_1, t_2, \dots, t_k)$ eine Funktion der k Veränderlichen $t_1, t_2, \dots, t_k$, die in der Variablen t_k ein Polynom darstellt, so bezeichnen wir mit $\partial_{t_k} f$ den Grad von $f(t_1, t_2, \dots, t_k)$ in t_k . Für den Grad eines Polynoms $f(z)$ schreiben wir auch kurz ∂f .

Ist $f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n$ ein Polynom vom Grade n , so wollen wir unter $f^*(z)$ das normierte Polynom

$$f^*(z) := \frac{f(z)}{\alpha_n}$$

verstehen.

Definition. Eine Folge $\tilde{u} = \{u_n(z) \mid n = 0, 1, \dots\}$ von Polynomen nennen wir ein (zulässiges) Polynomsystem, wenn $\partial u_n = n$ für $n = 0, 1, \dots$.

Für ein Polynomsystem $\tilde{u}$ mit Polynomen $u_n(z)$ schreiben wir auch kurz $\{u_n(z)\}$.

Definition. Es sei $B \subseteq \mathbb{C}$. Ein Polynomsystem $\tilde{u} = \{u_n(z)\}$ nennen wir von schwachem Wachstum über B , wenn

$$(*) \quad \varlimsup_{n \rightarrow \infty} |u_n^*(z)|^{1/n} =: \wedge_{\tilde{u}}(z) < \infty \quad \text{für } z \in B.$$

Wir nennen $\wedge_{\tilde{u}}(z)$ den Wachstumslimes im Punkte z und erklären als Wachstumsgröße $\Gamma_{\tilde{u}}(z)$

$$\Gamma_{\tilde{u}}(z) := \sup_{n \geq 1} |u_n^*(z)|^{1/n}.$$

Gilt die Beziehung (*) für $B = \mathbb{C}$, so nennen wir $\tilde{u}$ schlechthin ein System von schwachem Wachstum, abgekürzt SW-System.

Definition. Für eine Teilfolge M der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sei $u = \{v_n(z) \mid n \in M\}$ eine Folge von Polynomen mit paarweise verschiedenen Graden. Weiter sei für $n \in \mathbb{N}$

$$u_n(z) := \begin{cases} v_m(z), & \text{falls es ein } m \in M \text{ gibt, so daß } \deg v_m = n \\ z^n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir sagen, daß die Folge u von Polynomen einem SW-System angehört, wenn $\tilde{u} = \{u_n(z)\}$ ein SW-System ist.

I. Polynomsysteme von schwachem Wachstum

=====

1. Globale Aussagen mittels lokaler Wachstumseigenschaften

Es sieht zunächst sehr schwierig aus, für ein vorgelegtes Polynomsystem zu entscheiden, ob es ein SW-System ist und gegebenenfalls die Wachstumsgröße zu bestimmen. Wir wollen deshalb untersuchen, wieweit man mit Hilfe lokaler Wachstumseigenschaften schon globale Aussagen machen kann.

Ein erstes allgemeines Ergebnis gewinnen wir unter Benutzung einer Beweisidee von SZEGÖ (siehe [14], S.49). Es gilt der

Satz 1.1. Es sei B ein beschränkter Teilbereich der komplexen Zahlenkugel $\tilde{\mathbb{C}}$, der mindestens zwei Punkte enthält und dessen Komplement ein einfach zusammenhängendes, von der leeren Menge verschiedenes Gebiet ist. Ist ein Polynomsystem $\tilde{u}$ über B von schwachem Wachstum, so ist $\tilde{u}$ ein SW-System.

Bezeichnet $\psi(z)$ die (eindeutig bestimmte) Abbildung, die das Komplement ℓB von B konform auf das Äußere des Einheitskreises abbildet mit $\psi(\infty) = \infty$ und $\psi'(\infty) > 0$, so gilt für die Wachstumsgröße

$$(1.1) \quad \Gamma_{\tilde{u}}(z) \leq C |\psi(z)| \quad \text{für } z \in \ell B,$$

wobei

$$C := \max_{z \in B} \Gamma_{\tilde{u}}(z).$$

Beweis. Die Funktion

$$h(z) := \frac{u_{\tilde{u}}^*(z)}{\psi(z)^n}$$

ist in $\mathbb{C}B$ holomorph und nimmt in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathbb{C}B$ ihr Maximum auf dem Rande an. Für jeden Punkt $z_0 \in \mathbb{C}B$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $|\psi(z_0)| > 1 + \varepsilon$. Somit besteht die Ungleichung

$$\left| \frac{u_n^*(z_0)}{\psi(z_0)^n} \right| < \max_{|\psi(z)|=1+\varepsilon} \left| \frac{u_n^*(z)}{\psi(z)^n} \right| < \max_{|\psi(z)|=1+\varepsilon} |u_n^*(z)|.$$

Lassen wir ε eine Nullfolge durchlaufen, so bekommen wir mit

$$C := \max_{z \in B} \Gamma_{\tilde{u}}^-(z)$$

$$\frac{|u_n^*(z_0)|}{|\psi(z_0)|^n} \leq \max_{z \in B} |u_n^*(z)| \leq C^n.$$

Damit folgt Satz 1.1.

Bei der Anwendung dieses Satzes stößt man auf die Schwierigkeit, die konforme Abbildungsfunktion nicht explizite zu kennen. Falls jedoch B ein Kreisbereich oder eine Strecke ist, gewinnen wir einfache und mehr quantitative Folgerungen.

Korollar 1.1. Ist ein Polynomsystem $\tilde{u}$ über einem Kreisbereich $|z-p| \leq r$ von schwachem Wachstum, so ist $\tilde{u}$ ein SW-System. Mit

$$C := \max_{|z-p| \leq r} \Gamma_{\tilde{u}}^-(z)$$

gilt

$$(1.2) \quad \Gamma_{\tilde{u}}^-(z) \leq \frac{C}{r} |z-p| \quad \text{für } |z-p| > r.$$

Zum Beweis ist nur zu beachten, daß in diesem Spezialfall mit

$$\psi(z) = \frac{z-p}{r}$$

die Voraussetzungen von Satz 1.1 erfüllt werden.

Korollar 1.2. Für $a, b \in \mathbb{C}$ und $a \neq b$ sei S die Strecke

$$S = \{ z \mid z = at + (1-t)b, 0 \leq t \leq 1 \}.$$

Ist ein Polynomsystem $\tilde{u}$ über S von schwachem Wachstum, so ist $\tilde{u}$ ein SW-System.

Bezeichnen $\alpha = \alpha(z)$ und $\beta = \beta(z)$ die Halbmesser der durch den Punkt z gehenden Ellipse mit den Brennpunkten a und b , und setzen wir

$$C := \max_{z \in S} \Gamma_{\tilde{u}}(z),$$

so gilt für $z \notin S$

$$(1.3) \quad \Gamma_{\tilde{u}}(z) \leq 2C \frac{\alpha + \beta}{|a - b|}.$$

Beweis. Es sei

$$u = \frac{2}{b-a} z - \frac{a+b}{b-a}$$

und $w = u \pm \sqrt{u^2 - 1}$. Bei geeigneter Festlegung der Wurzel bildet $w = w(z)$ das Komplement von S konform auf das Äußere des Einheitskreises ab. Konfokale Ellipsen mit den Brennpunkten a, b gehen dabei in konzentrische Kreise über. Offensichtlich gilt dann

$$|w(z)| = 2 \frac{\alpha(z) + \beta(z)}{|a - b|}.$$

Übrigens berechnet man leicht

$$\alpha(z) = \frac{|z-a| + |z-b|}{2} \quad \text{und} \quad \beta(z) = \left(\alpha(z)^2 - \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Zur Verfeinerung unserer bisherigen Ergebnisse wollen wir nach - in gewissem Sinne minimalen - Punktmengen suchen, die ein Kriterium für SW-Systeme bilden. Wir benutzen dabei den Begriff des transfiniten Diameters.

Es sei P eine beschränkte, abgeschlossene, unendliche Punktmenge der komplexen Zahlenebene. Weiter sei V_n der größte Wert, den der Betrag der Vandermondeschen Determinante

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) := \prod_{1 \leq \kappa < \lambda \leq n} (z_\kappa - z_\lambda) \quad (n \geq 2)$$

annimmt, wenn die Punkte z_ν unabhängig voneinander P durchlaufen. Dann sind die Zahlen

$$d_n := \sqrt[n]{V_n}$$

für wachsendes n monoton fallend (siehe [6]), und der Grenzwert

$$(1.4) \quad d(P) := \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$$

heißt transfiniten Diameter von P .

Punkte $z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}$ aus P , für die das Maximum V_n angenommen wird, nennen wir n -te Fekete-Punkte.

FEKETE [6] hat noch eine äquivalente, jedoch für manche Betrachtungen bequemere Definition des transfiniten Diameters angegeben.

Es sei $T_n(z)$ das n -te Tschebyscheffsche Polynom über P , d.h. jenes normierte Polynom vom Grade n , dessen Maximalbetrag auf P unter allen solchen Polynomen minimal ist. Bezeichnet m_n diesen Maximalbetrag, dann konvergiert auch die Folge der Zahlen

$$\rho_n := \sqrt[n]{m_n}$$

gegen den transfiniten Diameter $d(P)$.

Nach diesen Vorbereitungen geben wir den folgenden Satz an.

Satz 1.2. Es sei P eine beschränkte, abgeschlossene, unendliche Punktmenge und $\tilde{u} = \{u_n(z)\}$ ein Polynomsystem, das

über P von schwachem Wachstum ist. G bzw. L bezeichne eine obere Schranke für die Wachstumsgröße $\Gamma_{\tilde{\omega}}(z)$ bzw. den Wachstumsindex $\Lambda_{\tilde{\omega}}(z)$ über P .

1. Ist der transfinite Diameter $d = d(P)$ positiv, so ist $\tilde{\omega}$ ein SW-System. Mit

$$\mu := \inf_{n \geq 1} \sqrt[n]{m_n}$$

gilt

$$(1.5) \quad \Gamma_{\tilde{\omega}}(z) \leq \frac{2G}{\mu} \max_{\zeta \in P} |z - \zeta|$$

und

$$(1.6) \quad \Lambda_{\tilde{\omega}}(z) \leq \frac{L}{d} \max_{\zeta \in P} |z - \zeta|.$$

2. Ist der transfinite Diameter $d(P)$ gleich Null, so gibt es Polynomsysteme $\tilde{\omega}$, die den Voraussetzungen genügen, aber keine SW-Systeme sind.

Beweis ²⁾. Es seien $z_1^{(n+1)}, z_2^{(n+1)}, \dots, z_{n+1}^{(n+1)}$ $n+1$ -te Fekete-Punkte von P . Mit

$$(1.7) \quad \ell_{n+1}(z) := \prod_{v=1}^{n+1} (z - z_v^{(n+1)})$$

sei

$$(1.8) \quad \ell'_{v, n+1}(z) := \frac{\ell_{n+1}(z)}{\ell'_v(z_v^{(n+1)}) \cdot (z - z_v^{(n+1)})}.$$

Auf Grund der Lagrangeschen Interpolationsformel gilt für jedes Polynom $u_n(z) \in \tilde{\omega}$ ($n \geq 1$)

$$(1.9) \quad u_n^*(z) = \sum_{v=1}^{n+1} u_n^*(z_v^{(n+1)}) \ell'_{v, n+1}(z).$$

Aus (1.8) folgt für $z \in P$

$$(1.10) \quad |\ell'_{v, n+1}(z)| = \frac{\sqrt{(z_1^{(n+1)}, \dots, z_{v-1}^{(n+1)}, z, z_{v+1}^{(n+1)}, \dots, z_{n+1}^{(n+1)})}}{\sqrt{(z_1^{(n+1)}, \dots, z_{v-1}^{(n+1)}, z_v^{(n+1)}, z_{v+1}^{(n+1)}, \dots, z_{n+1}^{(n+1)})}} \leq 1$$

und

$$(1.11) \quad \ell_{v, n+1}(z_v^{(n+1)}) = 1.$$

Damit erkennt man unter Beachtung von (1.8), daß das normierte Polynom

$$\frac{\ell_{n+1}(z)}{z - z_v^{(n+1)}}$$

vom Grade n über P den Maximalbetrag $|\ell'_{n+1}(z_v^{(n+1)})|$ annimmt. Der Vergleich mit dem Tschebyscheffschen Polynom $T_n(z)$ über P ergibt

$$(1.12) \quad |\ell'_{n+1}(z_v^{(n+1)})| \geq m_n \geq \mu^n.$$

Mit

$$\delta = \delta(z) = \max_{\gamma \in P} |z - \gamma|$$

bekommen wir aus (1.9)

$$(1.13) \quad \begin{cases} |u_n^*(z)| \leq \frac{1}{m_n} \sum_{v=1}^{n+1} |u_n^*(z_v^{(n+1)})| \left| \frac{\ell_{n+1}(z)}{z - z_v^{(n+1)}} \right| \\ \leq \frac{n+1}{m_n} \delta \max_{1 \leq v \leq n+1} |u_n^*(z_v^{(n+1)})|. \end{cases}$$

Ist der transfinite Diameter $d(P)$ positiv, so gilt $\mu > 0$, und man gewinnt (1.5) und (1.6) aus den Ungleichungen (1.12) und (1.13).

Es gelte nun $d(P) = 0$. O.B.d.A. können wir annehmen, daß die Punktmenge P im Kreisbereich $|z| < 1/2$ liegt. Für n -te Fekete-Punkte $z_v^{(n)}$ sei $|\ell'_n(z_i^{(n)})|$ der kleinste unter den Werten $|\ell'_n(z_v^{(n)})|$ ($v = 1, 2, \dots, n$). Wir betrachten nun das Polynomsystem $\mathcal{U} = \{u_n(z)\}$ mit

$$(1.14) \quad \begin{cases} u_0(z) = 1, & u_1(z) = z, \\ u_n(z) = \frac{\ell_n(z)}{z - z_i^{(n)}} (z - d_n^{1-n}) & (n \geq 2). \end{cases}$$

Nach (1.8), (1.10) und (1.11) gilt für $z \in P$

$$(1.15) \quad |u_n^*(z)| \leq |l'_n(z_i^{(n)})| |z - d_n^{1-n}| \quad (n \geq 2).$$

Auf Grund der Wahl des Index i besteht die Ungleichung

$$|l'_n(z_i^{(n)})|^n \leq \prod_{v=1}^n |l'_n(z_v^{(n)})| = |V(z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \dots, z_n^{(n)})|^2 = d_n^{n(n-1)}.$$

Somit liefert (1.15) für $z \in P$

$$|u_n^*(z)| \leq |z - d_n^{1-n}| d_n^{n-1} \leq |z| d_n^{n-1} + 1 \leq |z| d_2^{n-1} + 1 \leq \frac{3}{2}.$$

Also ist das System $\tilde{u}$ über P von schwachem Wachstum. Im Punkte $(\frac{3}{2}i)$ bekommen wir aber

$$|u_n^*(\frac{3}{2}i)| \geq |\frac{3}{2}i - d_n^{1-n}| > d_n^{1-n},$$

d.h.

$$\sqrt[n]{|u_n^*(\frac{3}{2}i)|} > d_n^{-\frac{n-1}{n}}.$$

Da die Zahlen d_n eine Nullfolge bilden, ist $\tilde{u}$ kein SW-System.

Damit ist Satz 1.2 bewiesen.

2. Wachstumskriterien und -abschätzungen

Wir wollen nun die Ergebnisse des vorherigen Abschnittes auf eine für Anwendungen zweckmäßigere Form bringen. Im folgenden sei ein Bereich B stets verschieden von der leeren Menge.

Definition 2.1. Ist B ein beschränkter, konvexer Bereich der komplexen Zahlenebene, so nennen wir

$$(2.1) \quad D_B(z) := \inf_{y \in B} |z - y|$$

die Distanz des Punktes z vom Bereich B .

An dieser Stelle geben wir nun ein Lemma an, das wir im Laufe dieser Arbeit mehrmals benötigen.

Lemma 2.1. Es seien $0 \leq \tau_0 < \tau_1$, B ein beschränkter konvexer Bereich und

$$f_n(z) = \prod_{v=1}^n (z - z_v)$$

ein normiertes Polynom vom Grade n . Dann existiert ein ρ mit $\tau_0 \leq \rho \leq \tau_1$, so daß für $D_B(z) = \rho$

$$(2.2) \quad |f_n(z)| \geq 2 \left(\frac{\tau_1 - \tau_0}{4} \right)^n.$$

Beweis ³). Da B konvex ist, überlegt man sich leicht, daß es eine Halbgerade g gibt, die außerhalb von B verläuft, in einem Randpunkt σ von B endet und die folgende Eigenschaft besitzt: Sind ζ_κ ($\kappa = 0, 1$) zwei Punkte mit $\zeta_\kappa \notin B$ und bezeichnen $\tilde{\zeta}_\kappa$ die Schnittpunkte der Distanzlinien $D_B(z) = D_B(\zeta_\kappa)$ mit der Halbgeraden g , so gilt

$$|\zeta_0 - \zeta_1| \geq |\tilde{\zeta}_0 - \tilde{\zeta}_1|.$$

Entsprechend seien jetzt $\tilde{z}_v$ ($v = 1, 2, \dots, n$) bzw. $\tilde{\tau}_\kappa$ ($\kappa = 0, 1$) die Schnittpunkte der Distanzlinien $D_B(z) = D_B(z_v)$ bzw. $D_B(z) = \tau_\kappa$ mit der Halbgeraden g . Für $z_v \in B$ definieren wir $\tilde{z}_v = \sigma$. Der Betrag des Polynoms

$$\tilde{f}_n(z) := \prod_{v=1}^n (z - \tilde{z}_v)$$

nimmt in einem Punkt $\tilde{\tau}$ der Verbindungsstrecke von $\tilde{\tau}_0$ und $\tilde{\tau}_1$ ein Maximum $M(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)$ an. Auf der Distanzlinie $D_B(z) = |\tilde{\tau} - \sigma| =: \rho$ gilt dann

$$|f_n(z)| = \prod_{v=1}^n |z - z_v| \geq \prod_{v=1}^n |\tilde{\tau} - \tilde{z}_v| = M(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n).$$

Für den Beweis des Lemmas genügt es nunmehr, den kleinsten Wert M_n von $M(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)$ unter allen möglichen Verteilungen der Punkte $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n$ auf der Halbgeraden g zu suchen. Führen wir noch die Transformation

$$w = - \frac{\tilde{r}_1 + \tilde{r}_0}{\tilde{r}_1 - \tilde{r}_0} + \frac{2z}{\tilde{r}_1 - \tilde{r}_0}$$

durch, so besitzt das entsprechende Problem in der w -Ebene nach TSCHEBYSCHEFF (siehe z.B. [1], S.57) die optimale Lösung

$$M(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_n) \geq 2^{1-n}.$$

Rücktransformation in die z -Ebene ergibt

$$M_n = 2 \left(\frac{r_1 - r_0}{4} \right)^n,$$

wie behauptet wurde.

Mit Hilfe der Ideen von Satz 1.2 wollen wir nun ein besonders einfaches hinreichendes und notwendiges Wachstumskriterium beweisen.

Satz 2.1. Es sei $\tilde{u} = \{u_n(z)\}$ ein Polynomsystem, dessen Polynome in einem Kreisbereich $|z - z_0| \leq r$ keine Nullstellen besitzen.

1. Das System $\tilde{u}$ ist dann und nur dann ein SW-System, wenn es im Punkt z_0 von schwachem Wachstum ist.

2. Ist das System $\tilde{u}$ im Punkte z_0 von schwachem Wachstum, so gilt

$$(2.3) \quad \Gamma_{\tilde{u}}^-(z) \leq \sqrt[3]{2} \frac{4}{r} (|z - z_0| + r) \Gamma_{\tilde{u}}^-(z_0),$$

$$(2.4) \quad \Lambda_{\tilde{u}}^-(z) \leq \frac{4}{r} (|z - z_0| + r) \Lambda_{\tilde{u}}^-(z_0).$$

Beweis. Ist das System $\tilde{u}$ im Punkte z_0 nicht von schwachem Wachstum, so ist die Aussage des Satzes trivial.

Es sei nun das System $\tilde{u}$ im Punkte z_0 von schwachem Wachstum. Da das Polynom $u_n(z)$ keine Nullstellen im Kreisbereich $K := \{z \mid |z - z_0| \leq r\}$ besitzt, gibt es nach dem Minimumprinzip

und der Theorie der analytischen Flächen eine Kurve C_n , die von z_0 zu einem Randpunkt von K führt, so daß für $z \in C_n$ $|u_n^*(z)| \leq |u_n^*(z_0)|$ (4).

Es seien nun $z_1^{(n+1)}, z_2^{(n+1)}, \dots, z_{n+1}^{(n+1)}$ $n+1$ -te Fekete-Punkte von C_n . Mit $T_k(C_n, z)$ bezeichnen wir das k -te Tschebyscheffsche Polynom bezüglich C_n . Weiter sei $m_k(C_n)$ der Maximalbetrag von $T_k(C_n, z)$ über C_n . Stellen wir $u_n^*(z)$ als Interpolationspolynom über den Punkten $z_v^{(n+1)}$ ($v=1, 2, \dots, n+1$) dar, so gilt nach (1.13) mit den dortigen Bezeichnungen

$$(2.5) \quad |u_n^*(z)| \leq \frac{1}{m_n(C_n)} \sum_{v=1}^{n+1} |u_n^*(z_v^{(n+1)})| \left| \frac{l_{n+1}(z)}{z - z_v^{(n+1)}} \right|.$$

Wie man leicht einsieht, bestehen die Ungleichungen

$$(2.6) \quad \left| \frac{l_{n+1}(z)}{z - z_v^{(n+1)}} \right| \leq (|z - z_0| + r)^n$$

und

$$(2.7) \quad |u_n^*(z_v^{(n+1)})| \leq |u_n^*(z_0)|.$$

Anwendung von Lemma 2.1 auf das Polynom $T_n(C_n, z)$ liefert

$$(2.8) \quad m_n(C_n) \geq 2 \left(\frac{r}{4} \right)^n.$$

Aus (2.5) bis (2.8) gewinnt man nun leicht die Abschätzungen (2.3) und (2.4). Damit ist alles bewiesen.

Für die Ableitung von Polynomen gilt der

Satz 2.2. Ist $\tilde{u} = \{u_n(z)\}$ ein SW-System, so ist auch $w = \{u'_{n+1}(z)\}$ ein SW-System. Mit

$$C(z) := \max_{|y-z| \leq 1} \Gamma_{\tilde{u}}(y)$$

gilt

$$(2.9) \quad \Gamma_w(z) \leq C(z) \max(1, \frac{C(z)}{2})$$

und

$$(2.10) \quad \Lambda_{n_0}(z) \leq \max_{|\gamma-z| \leq 1} \Lambda_{\tilde{w}}(z).$$

Beweis. Man bekommt diesen Satz mit Hilfe der Ungleichung

$$|u_{n+1}^*(z)| \leq \frac{1}{2\pi(n+1)} \left| \int_{|\gamma-z|=1} \frac{u_{n+1}^*(\gamma)}{(\gamma-z)^2} d\gamma \right|.$$

Daraus folgt

$$|u_{n+1}^*(z)|^{1/n} \leq C(z) \left(\frac{C(z)}{n+1} \right)^{1/n}.$$

Eine Betrachtung des Polynoms $u_1^*(z)$ liefert $C(z) \geq 1$. Damit folgt (2.9); (2.10) bekommt man analog.

Wir wollen nun eine möglichst einfache Abschätzung für die Wachstumsgröße $\Gamma_{\tilde{w}}(z)$ eines SW-Systems $\tilde{w}$ finden.

Für einen Punkt γ der komplexen Ebene setzen wir

$$\alpha := b := \max_{|z-\gamma| \leq 1} \Gamma_{\tilde{w}}(z).$$

Dann bekommt man unter Benutzung von Korollar 1.1

$$\Gamma_{\tilde{w}}(z) \leq \alpha r + b \quad \text{für } |z-\gamma| \leq r.$$

Es sei nun B ein beschränkter, konvexer Bereich, der mindestens zwei Punkte enthält. O.B.d.A. können wir annehmen, daß es einen Kreisbereich K mit der Einheit als Radius und einem Mittelpunkt $\gamma \in B$ gibt, der B enthält. Dann gilt $D_B(z) \geq D_K(z)$. Setzen wir wieder

$$\alpha := b := \max_{|z-\gamma| \leq 1} \Gamma_{\tilde{w}}(z),$$

so bekommen wir nach Korollar 1.1

$$\Gamma_{\tilde{w}}(z) \leq \begin{cases} b & \text{für } z \in K, \\ \alpha |z-\gamma| & \text{für } z \notin K. \end{cases}$$

Dann gilt für $D_B(z) \leq r$

$$\Gamma_{\tilde{\mu}}(z) \leq \alpha (D_K(z) + 1) = \alpha D_K(z) + \alpha \leq \alpha D_B(z) + b \\ \leq \alpha \tau + b.$$

Somit erhalten wir den

Satz 2.3. Ist $\tilde{\mu}$ ein SW-System und B ein beschränkter, konvexer Bereich, dann gibt es reelle Konstanten α und b mit $\alpha \geq 1$ und $b \geq 0$, so daß für $D_B(z) \leq \tau$

$$\Gamma_{\tilde{\mu}}(z) \leq \alpha \tau + b.$$

Wir haben damit die Wachstumsgröße eines SW-Systems durch eine lineare Funktion der Distanz abgeschätzt. Unsere Information über das Wachstum wird dann nur durch einen „Bezugsbereich“ B und zwei Konstanten α und b ausgedrückt. Auf Grund von Satz 2.3 vereinbaren wir für späteren Gebrauch:

Definition 2.2. Es sei $\tilde{\mu}$ ein SW-System. Ein Tripel (B, α, b) nennen wir eine Abschätzung für $\tilde{\mu}$, wenn

- (i) B ein beschränkter, konvexer Bereich ist,
- (ii) α und b nichtnegative reelle Zahlen sind mit $\alpha \geq 1$ und
- (iii) $\Gamma_{\tilde{\mu}}(z) \leq \alpha \tau + b$ für $D_B(z) \leq \tau$.

Besteht der Bereich B nur aus einem Punkt γ , so schreiben wir statt $(\{\gamma\}, \alpha, b)$ auch kurz (γ, α, b) . Sinngemäß be-deute dann (o, α, b) , daß als Distanzfunktion die Betragsfunktion zu verwenden ist.

3. Beispiele

Eine Reihe wichtiger Beispiele für SW-Systeme liefert der folgende Satz, dessen Beweis trivial ist.

Satz 3.1. Liegen die Nullstellen der Polynome $u_n(z)$ ($n \geq 1$) eines Polynomsystems $\tilde{u}$ in einem Kreisbereich $|z - z_0| \leq \rho$, so ist $\tilde{u}$ ein SW-System mit einer Abschätzung $(z_0, 1, \rho)$.

Beispiel 1. Zur Illustration von Definition 2.2 betrachten wir zunächst das Polynomsystem $\tilde{u} = \{u_n(z)\}$ mit

$$u_{2k}(z) = (z^2 - 1)^k, \quad u_{2k+1}(z) = z^{2k+1} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Bezeichnet I das Intervall $I = [-1, 1]$, so überlegt man sich leicht, daß das Tripel $(I, 1, 1)$ eine Abschätzung für $\tilde{u}$ ist. Bei diesem Beispiel erweist sich eine Abschätzung mit der Betragsfunktion als weniger scharf.

Beispiel 2. Es sei $\omega(x)$ eine in einem reellen Intervall $I = [\alpha, b]$ definierte nichtnegative Funktion, für die sämtliche Integrale

$$c_n = \int_{\alpha}^b x^n \omega(x) dx \quad (0 \leq n < \infty)$$

im Lebesgueschen Sinne absolut existieren; insbesondere sei $c_0 > 0$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes System von Polynomen $p_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) mit der Orthonormalitätseigenschaft

$$\int_{\alpha}^b p_\nu(x) p_\mu(x) \omega(x) dx = \delta_{\nu\mu}.$$

Bekanntlich liegen die Nullstellen dieser Polynome im Inter-

vall $I=[a,b]$. Daher ist $\{p_n(z)\}$ ein SW-System.

Unter gewissen Voraussetzungen über die Belegungsfunktion $\omega(x)$ sind die Linien mit konstantem Wachstumslices konfokale Ellipsen, die die Endpunkte des Intervalls I als Brennpunkte besitzen (siehe [15], S.295). Auf diesen Ellipsen findet man auch einfache Abschätzungen für die Wachstumsgröße $\Gamma_n(z)$ (vergl. Korollar 1.2). Jedoch bilden die konfokalen Ellipsen keine Schar von Äquidistanzlinien. Zur Abschätzung des Systems $\{p_n(z)\}$ durch ein Tripel wird man am besten den Ellipsen Distanzlinien bezüglich des Intervalls I oder Kreise um den Mittelpunkt von I einbeschreiben.

Beispiel 3. Ist C eine geschlossene, rektifizierbare Kurve, so kann man mit Hilfe des für quadratisch integrierbare Funktionen erklärten Skalarproduktes

$$(f, g) := \int_C f(z) \overline{g(z)} |dz|$$

ein System von orthonormalen Polynomen $p_n(z)$ definieren. Die Nullstellen dieser Polynome liegen nach FEJER [5] in der konvexen Hülle des von C berandeten beschränkten Bereichs. Also ist $\{p_n(z)\}$ ein SW-System.

Beispiel 4. In ähnlicher Weise kann man für einen meßbaren, beschränkten Bereich B mit Flächenelement $d\sigma$ ein orthonormales Polynomsystem $\{q_n(z)\}$ hinsichtlich des Skalarprodukts

$$(f, g) := \int_B f(z) \overline{g(z)} d\sigma$$

definieren. Die Nullstellen der Polynome $q_n(z)$ liegen nach FEJER [5] in der konvexen Hülle des Bereichs B . Somit ist auch $\{q_n(z)\}$ ein SW-System.

Wir wollen noch SW-Systeme von Polynomen angeben, deren Nullstellen nicht beschränkt sind.

Beispiel 5. Es sei

$$u_0(z) = 1$$

und für $n \geq 1$

$$u_n(z) = (z + n^{\log n})^{[\sqrt{n}]} z^{k(n)} \quad \text{mit} \quad k(n) = n - [\sqrt{n}].$$

Dann ist $\tilde{u} = \{u_n(z)\}$ ein SW-System.

Beispiel 6. Mit

$$z_{nv} := \sum_{\mu=0}^{v-1} \frac{1}{n-\mu} \quad (1 \leq v \leq n)$$

definieren wir

$$u_n(z) := \prod_{v=1}^n (z - z_{nv}).$$

Für die größte Nullstelle des Polynoms $u_n(z)$ gilt dabei

$$z_{nn} = \log n + \gamma + o(1),$$

wenn γ die Eulersche Konstante bezeichnet. Auch $\tilde{u} = \{u_n(z)\}$ ist ein SW-System. Um dies zu zeigen, genügt es nach Satz 2.1 das schwache Wachstum im Punkte -1 nachzuweisen. Man findet leicht unter Benutzung der bekannten Ungleichung

$$(3.1) \quad e \left(\frac{n}{e} \right)^n \leq n! \leq n e \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

$$|u_n^*(-1)| < \prod_{v=1}^n \frac{n+1}{n-v+1} = \frac{(n+1)^n}{n!} < \frac{(n+1)^n}{e \left(\frac{n}{e} \right)^n}$$

d.h.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |u_n^*(-1)|^{\frac{1}{n}} \leq e.$$

Dieses Polynomsystem besitzt insofern eine gewisse Ähnlichkeit mit den Systemen orthogonaler Polynome über der reellen

Zahlengeraden, als zwischen je zwei Nullstellen von $u_{n-1}(z)$ genau eine Nullstelle von $u_n(z)$ liegt. Auf die Frage, ob es SW-Systeme von reellen orthogonalen Polynomen gibt, deren Nullstellen nicht beschränkt sind, kommen wir im Abschnitt 5 zurück.

Beispiel 7. Für Polynome mit äquidistanten Nullstellen halten wir noch die folgende Bemerkung fest.

Ist $\{\ell_n\}$ eine Folge positiver reeller Zahlen, und definieren wir mit

$$z_{nv} := \frac{v \ell_n}{n-1} \quad (v = 0, 1, \dots, n-1)$$

die Polynome

$$u_0(z) = 1, \quad u_1(z) = z$$

und

$$u_n(z) = \prod_{v=1}^n (z - z_{nv}) \quad \text{für } n \geq 2,$$

so ist $\{u_n(z)\}$ genau dann ein SW-System, wenn

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \ell_n < \infty.$$

Dieses Ergebnis gewinnt man leicht mit Hilfe von Satz 2.1, indem man das Wachstum im Punkte i untersucht. Damit ein solches Polynomsystem ein SW-System ist, müssen also notwendig alle Nullstellen seiner Polynome beschränkt sein.

4. Nullstellenverteilung

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, daß die Nullstellen der Polynome eines SW-Systems nicht notwendig be-

schränkt sind. Jedoch gilt der folgende

Satz 4.1. Es sei $\mathcal{U} = \{u_n(z)\}$ ein SW-System. Weiter sei $\{A(n)\}$ eine Folge von natürlichen Zahlen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} = 1 - \delta, \quad \text{wobei } 0 < \delta \leq 1.$$

Dann gibt es für jeden Punkt ζ der komplexen Zahlenebene einen Kreisbereich K mit Mittelpunkt ζ und der folgenden Eigenschaft:

Jedes Polynom $u_n(z)$ besitzt entweder mindestens $A(n)$ oder alle Nullstellen in K .

Für den Beweis dieses Satzes benutzen wir zwei Hilfsätze, die wir als Lemmata angeben.

Lemma 4.1. Ist $\mathcal{U} = \{u_n(z)\}$ ein SW-System und

$$C(\zeta) := \max_{|z-\zeta| \leq 1} \Gamma_{\mathcal{U}}^*(z),$$

so gilt für die Koeffizienten der Taylor-Entwicklung

$$u_n^*(z) = \sum_{v=0}^n u_{nv}(\zeta) (z-\zeta)^v$$

des Polynoms $u_n^*(z)$ im Punkte ζ

$$u_{nn}(\zeta) = 1$$

und

$$(4.1) \quad |u_{nv}(\zeta)| \leq C(\zeta)^n \quad (v = 0, 1, \dots, n-1).$$

Der Beweis ergibt sich sofort aus der Ungleichung

$$|u_{nv}(\zeta)| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\zeta|=1} \frac{u_n^*(z)}{(z-\zeta)^{n+1}} dz \right| \leq \max_{|z-\zeta| \leq 1} |u_n^*(z)|.$$

Schließlich verwenden wir in einer schwächeren Form eine bekannte Nullstellenverteilungsformel (siehe z.B. [13]).

Lemma 4.2. Es seien $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ die Nullstellen des Polynoms $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ vom Grade n . Dann gilt für jedes $1 \leq p \leq n$

$$(4.2) \quad |\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_p| \leq \left(\frac{|a_0|^2 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2}{|a_n|^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir den Satz 4.1. Da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} = 1 - \delta \quad (0 < \delta \leq 1),$$

gibt es ein $n_0 > 1$, so daß

$$(4.3) \quad \frac{A(n) - 1}{n} \leq 1 - \frac{\delta}{2} \quad \text{für } n > n_0.$$

Nach den Lemmata 4.1 und 4.2 besitzen die Polynome $u_n(z)$ für $n \leq n_0$ ihre Nullstellen im Kreisbereich

$$(4.4) \quad |z - \gamma| \leq (1 + n_0 C(\gamma)^{2n_0})^{\frac{1}{2}} =: \tau_1.$$

Für $n > n_0$ besitzen die Polynome $u_n(z)$ nach Lemma 4.2 wenigstens $A(n)$ Nullstellen im Kreisbereich

$$(4.5) \quad \begin{cases} |z - \gamma| \leq (1 + n C(\gamma)^{2n})^{\frac{1}{2(n - A(n) + 1)}} \\ \leq 1 + (n^{\frac{1}{2n}} C(\gamma))^{\frac{n}{n - A(n) + 1}} \leq 1 + (3^{\frac{1}{2}} C(\gamma)^2)^{\frac{1}{6}} =: \tau_2. \end{cases}$$

Der Kreisbereich

$$|z - \gamma| \leq \max(\tau_1, \tau_2)$$

besitzt dann die gewünschte Eigenschaft.

Wir wollen noch einen Spezialfall von Satz 4.1 angeben und dabei etwas quantitativere Aussagen machen.

Satz 4.2. Es sei $\tilde{u} = \{u_n(z)\}$ ein SW-System, p eine na-

türliche Zahl und γ eine komplexe Zahl. Weiter sei

$$C(\gamma) := \max_{|z-\gamma| \leq 1} \sqrt[n]{\omega(z)}.$$

Dann besitzt jedes Polynom $u_n(z) \in \mathcal{W}$ entweder p oder alle Nullstellen im Kreisbereich

$$(4.6) \quad |z - \gamma| \leq 1 + (3^{\frac{1}{p}} C(\gamma))^p.$$

Beweis. Setzen wir $A(n) := p$, $n_0 := p$ und $\delta := 2/p$, so ist (4.3) erfüllt. Unter Benutzung von (4.4) und (4.5) gewinnen wir den Kreisbereich (4.6).

5. Orthogonale Polynome über der reellen Geraden

Da den Entwicklungen nach orthogonalen Polynomen in den Arbeiten von SPECHT und TURÁN⁵⁾ viel Beachtung geschenkt wurde, wollen wir die daraus gebildeten Systeme auf die Eigenschaft des schwachen Wachstums untersuchen. Wie das Beispiel 2 des Abschnitts 3 gezeigt hat, bilden orthogonale Polynome über einem endlichen Intervall trivialerweise ein SW-System. Hier nun wollen wir die Frage behandeln, ob es orthogonale Polynome (über einem unbeschränkten Intervall) mit unbeschränkten Nullstellen gibt, die ein SW-System bilden. Zu diesem Zwecke schicken wir die folgenden Hilfsmittel voraus.

Lemma 5.1. Es sei $\{p_n(x)\}$ ein orthonormiertes Polynomsystem über der reellen Zahlengeraden mit einer Belegungsfunktion $\omega(x)$. Es gebe ein Intervall I von der Länge d , so daß für $x \in I$ $\omega(x) \geq c > 0$. Dann gilt für $x \in I$

$$(5.1) \quad |p_n(x)| \leq \frac{n+1}{\sqrt{cd}}.$$

Beweis. Es sei I das Intervall $I=[a, b]$. Dann besteht die Ungleichung

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p_n^2(x) \omega(x) dx \geq \int_a^b p_n^2(x) \omega(x) dx \geq c \int_a^b p_n^2(x) dx.$$

Führen wir die Substitution

$$x(t) = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}$$

aus, so bekommen wir

$$(5.2) \quad c \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 p_n^2(x(t)) dt \leq 1.$$

Wir wollen nun $p_n(x(t))$ nach den Legendreschen Polynomen $L_\nu(t)$ ($\nu=0, 1, \dots$) entwickeln. Bekanntlich genügen die Legendreschen Polynome der zweigliedrigen Rekursionsgleichung

$$\nu L_\nu(t) = (2\nu-1)L_{\nu-1}(t) - (\nu-1)L_{\nu-2}(t)$$

mit den Anfangsgliedern

$$L_0(t) = 1, \quad L_1(t) = t.$$

Ferner besteht die Ungleichung (siehe z.B. [15], S.162)

$$(5.3) \quad |L_\nu(t)| \leq 1 \quad \text{für} \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Die Polynome

$$\sqrt{\frac{2\nu+1}{2}} L_\nu(t)$$

bilden ein orthonormiertes Polynomsystem zu der Belegungsfunktion

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Entwickelt man nun $p_n(x(t))$ nach diesem System, so be-

kommt man unter Beachtung von (5.2) und (5.3) mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$c \frac{b-a}{2} p_n^2(x(t)) \leq \sum_{v=0}^n (v + \frac{1}{2}) L_v^2(t) \leq \frac{(n+1)^2}{2}$$

für $-1 \leq t \leq 1$. Daraus folgt die Ungleichung (5.1).

Wir benötigen noch das

Lemma 5.2. Es seien die Voraussetzungen von Lemma 5.1 erfüllt. Ferner bezeichne λ_n den höchsten Koeffizienten des orthonormierten Polynoms $p_n(x)$, d.h. $p_n(x) = \lambda_n p_n^*(x)$. Das System $\{p_n(x)\}$ ist dann und nur dann ein SW-System, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\lambda_n}} < \infty.$$

Beweis. Da die Voraussetzungen von Lemma 5.1 erfüllt sind, gilt für $x \in I$

$$|p_n(x)| \leq \frac{n+1}{\sqrt{cd}},$$

d.h.

$$(5.4) \quad |p_n^*(x)| \leq \frac{1}{\lambda_n} \cdot \frac{n+1}{\sqrt{cd}}.$$

Gilt also $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-1/n} < \infty$, so ist für $x \in I$ auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p_n^*(x)|^{\frac{1}{n}} < \infty$$

beschränkt. Nach Korollar 1.2 folgt, daß $\{p_n(x)\}$ ein SW-System ist.

Ist umgekehrt $\{p_n(x)\}$ ein SW-System, so gibt es nach Satz 4.1 einen Kreisbereich K und im Falle reeller orthogonaler Polynome insbesondere ein Intervall I_1 , so daß jedes Polynom $p_n(x)$ für $n \geq 1$ mindestens eine Nullstelle in

I_n besitzt. Bezeichnen wir nun mit x_n eine solche Nullstelle von $p_n(x)$, so gilt für die zugehörige Christoffel-Konstante η_n (siehe [15], S.48)

$$\eta_n = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n p_{n+1}(x_n) p'_n(x_n)},$$

d.h.

$$\eta_n = \frac{1}{n \lambda_n^2 p_{n+1}^*(x_n) p_n'^*(x_n)}.$$

Trivialerweise besteht auf Grund der Gaußschen mechanischen Quadratur die Ungleichung

$$\eta_n \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(t) dt = \lambda_0^{-2} > cd.$$

Damit folgt

$$\frac{1}{\lambda_n^2} \leq \frac{1}{\lambda_0^2} n p_{n+1}^*(x_n) p_n'^*(x_n).$$

Da nach Satz 2.2 mit $\{p_n(x)\}$ auch $\{p_n'(x)\}$ ein SW-System ist, und da $x_n \in I_1$ für alle n , bekommen wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\lambda_n}} < \infty.$$

Es gilt nun der folgende

Satz 5.1. Es sei $\{p_n(x)\}$ ein System orthonormaler Polynome über der reellen Zahlengeraden. Die zugehörige Belegungsfunktion $\omega(x)$ besitze die folgende Eigenschaft:

Zu jeder natürlichen Zahl k gibt es im Komplement des Intervalls $[k, -k]$ bezüglich der reellen Geraden ein Intervall $I_k = [a_k, b_k]$ von der Länge d_k , so daß für $x \in I_k$ $\omega(x) \geq c_k > 0$. Weiter gelte für alle k $d_k \geq d > 0$.

Dann ist $\{p_n(x)\}$ kein SW-System.

Beweis. Zum Beweis nehmen wir an, $\{p_n(x)\}$ wäre ein SW-System. Nach Lemma 5.2 gibt es dann eine Konstante K , so daß

$$(5.5) \quad \frac{1}{\lambda_n^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x) p_n^{*2}(x) dx \leq K^{2n}.$$

Wir wollen nun mit Hilfe der Ideen von Korollar 1.2 und Abschnitt 4 die Nullstellenverteilung der Polynome $p_n(x)$ untersuchen. An den früheren Stellen haben wir vom Grad unabhängige, für das System als Ganzes gültige Aussagen gemacht, indem wir am Ende der Beweise $|p_n^*(z)|^{1/n}$ durch $\Gamma_n(z)$ abgeschätzt haben. Hier wollen wir zunächst in analoger Weise vom Grad abhängige Aussagen machen.

O.B.d.A. können wir für die Länge d_k der Intervalle I_k $d_k \leq 2$ annehmen. Nach Lemma 5.1 und (5.5) gilt für $x \in I_k$

$$|p_n^*(x)| \leq \frac{n+1}{\sqrt{c_k d_k}} K^n.$$

Entsprechend dem Korollar 1.2 gilt in dem Kreisbereich C_k mit Radius 1 und dem Mittelpunkt $e_k := \frac{1}{2}(a_k + b_k)$

$$(5.6) \quad \left\{ \begin{aligned} |p_n^*(z)| &\leq \left(\frac{2}{d_k}\right)^n \left(1 + \sqrt{1 + \frac{d_k^2}{4}}\right)^n K^n \frac{n+1}{\sqrt{c_k d_k}} \\ &\leq \left(\frac{5K}{d}\right)^n \frac{n+1}{\sqrt{c_k d_k}}. \end{aligned} \right.$$

Mit Hilfe der Methoden von Abschnitt 4 stellt man leicht fest, daß das Polynom $p_n^*(z)$ für $1 \leq q \leq n$ wenigstens q (reelle) Nullstellen im Kreisbereich

$$(5.7) \quad |z - e_k| \leq \left(1 + \frac{n(n+1)^2}{c_k d_k} \left(\frac{5K}{d} \right)^{2n} \right)^{\frac{1}{2(n-q+1)}} \quad (k \geq 1)$$

besitzt. Setzen wir $q = \left[\frac{n}{2} \right] + 1$ ($n > 2$)

und

$$s_{kn} := \left(\frac{5K}{d} \right)^2 \left(\frac{n(n+1)^2}{c_k d_k} \right)^{\frac{1}{n}} + 1,$$

so finden wir im Fall $k=1$, daß wenigstens $\left[\frac{n}{2} \right] + 1$ Nullstellen des Polynoms $p_n^*(x)$ im Intervall

$$(5.8) \quad J_1^{(n)} := \{ x \mid e_1 - s_{1n} \leq x \leq e_1 + s_{1n} \}$$

liegen. Zu der natürlichen Zahl

$$(5.9) \quad m := 2 + \left[2 \left(1 + \left(\frac{5K}{d} \right)^2 \right) + \max(|a_1|, |b_1|) \right]$$

gibt es nach Voraussetzung ein Intervall $I_m = [a_m, b_m]$ mit $b_m - a_m = d_m > d$, $|a_m| \geq m$, $|b_m| \geq m$ und $\omega(x) \geq c_m > 0$ für $x \in I_m$. Nach (5.7) besitzt das Polynom $p_n^*(x)$ auch $\left[\frac{n}{2} \right] + 1$ Nullstellen im Intervall

$$(5.10) \quad J_m^{(n)} := \{ x \mid e_m - s_{mn} \leq x \leq e_m + s_{mn} \}.$$

Da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(n+1)^2}{c_\mu d_\mu} \right)^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (\mu = 1, 2, \dots),$$

sind die Intervalle $J_1^{(n)}$ und $J_m^{(n)}$ nach Konstruktion von m für hinreichend großes n disjunkt. Dann besitzt aber das Polynom $p_n^*(x)$ in der Vereinigung $J_1^{(n)} \cup J_m^{(n)}$ wenigstens

$$2 \left(\left[\frac{n}{2} \right] + 1 \right) > n$$

Nullstellen. Dies ist ein Widerspruch. Damit ist Satz 5.1 bewiesen.

II. Das Landau - Montelsche Problem

=====

6. Das van Vlecksche Problem

Für ρ Nullstellen eines durch seine Taylor-Entwicklung gegebenen Polynoms vom Grade n ($n \geq \rho$) hat VAN VLECK [16] Schranken angegeben, die nur von den ersten $\rho+1$ Entwicklungskoeffizienten und von n abhängen.

Ist $\{u_n(z)\}$ ein Polynomsystem und

$$f(z) = a_0 u_0(z) + a_1 u_1(z) + \dots + a_n u_n(z)$$

ein Polynom vom Grade n , so wollen wir unter dem van Vleckschen Problem die folgende Aufgabe verstehen:

Man gebe einen beschränkten Bereich der komplexen Zahlenebene an, der unabhängig von den Koeffizienten $a_{\rho+1}, a_{\rho+2}, \dots, a_n$ mindestens ρ Nullstellen des Polynoms $f(z)$ enthält.

Daß solche Bereiche existieren, sieht man leicht durch indirekte Beweisführung ein. Falls das Polynom $f(z)$ keine „Lücken“ besitzt, stimmt das van Vlecksche Problem mit dem Landau - Montelschen Problem überein. Im Hinblick auf das Landau - Montelsche Problem wollen wir das van Vlecksche Problem gleich unter Ausnutzung eventuell vorhandener „Lücken“ behandeln. Es gilt der

Satz 6.1. Es sei $\mathcal{M} = \{u_n(z)\}$ ein beliebiges Polynomsystem und B ein beschränkter, konvexer Bereich. Besitzt das Polynom

$$f_p(z) = a_0 u_0(z) + a_1 u_1(z) + \dots + a_p u_p(z)$$

wenigstens q Nullstellen im Bereich $D_B(z) \leq \tau$ ($\tau > 0$),

so besitzt das Polynom

$$f_{n_k}(z) = f_p(z) + a_{n_1} u_{n_1}(z) + a_{n_2} u_{n_2}(z) + \dots + a_{n_k} u_{n_k}(z) \\ (p < n_1 < n_2 < \dots < n_k)$$

wenigstens q Nullstellen in einem Bereich

$$D_B(z) \leq S(q, n_1, n_2, \dots, n_k, r, \tilde{w}),$$

der nicht von den Koeffizienten $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}$ abhängt.

Setzen wir

$$M_v(p) := \max_{D_B(z)=p} |u_v^k(z)| \quad (v = 1, 2, \dots),$$

$$S_{q_0} := r \quad (q \geq 1)$$

und definieren rekursiv

$$(6.1) \quad S_{1, \kappa} := S_{1, \kappa-1} + M_{n_\kappa}(S_{1, \kappa-1})^{\frac{1}{n_\kappa}}$$

sowie für $q > 1$

$$(6.2) \quad S_{q, \kappa} := S_{q, \kappa-1} \left(\frac{q+\kappa}{\kappa+1} + \left(\frac{M_{n_\kappa} \left(\frac{q+\kappa}{\kappa+1} S_{q, \kappa-1} \right)}{2 S_{q, \kappa-1}^{n_\kappa}} \left(\frac{4(\kappa+1)}{q-1} \right)^{q-1} \right)^{\frac{1}{n_\kappa - q + 1}} \right) \\ (\kappa = 1, 2, \dots, k),$$

dann gilt

$$(6.3) \quad S(q, n_1, n_2, \dots, n_k, r, \tilde{w}) \leq S_{q, k}.$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion über k , wobei wir noch $n_0 := p$ setzen. Dann ist unser Satz für $k=0$ nach Voraussetzung richtig. Wir nehmen nun die Gültigkeit des Satzes für $k = \kappa - 1 \geq 1$ an und wollen zeigen, daß die angegebenen Schranken auch noch richtig sind, wenn man κ um 1 erhöht. Im folgenden sei λ_n stets der höchste Koeffizient von $u_n(z)$ ($n = 1, 2, \dots$).

Zunächst behandeln wir den Fall $q = 1$. Wäre die durch (6.1) gegebene Schranke für $k = \kappa$ falsch, so gäbe es ein Polynom

$f_{n_k}(z)$, das den Voraussetzungen des Satzes genügt und keine Nullstellen im Bereich $D_B(z) \leq S_{1k}$ besitzt. Auf der geschlossenen Kurve $D_B(z) = S_{1k-1}$ gilt dann

$$|f_{n_k}(z)| > |\alpha_{n_k}| |\lambda_{n_k}| M_{n_k}(S_{1k-1}).$$

Andererseits gilt auf dieser Kurve

$$|\alpha_{n_k} u_{n_k}(z)| \leq |\alpha_{n_k}| |\lambda_{n_k}| M_{n_k}(S_{1k-1}).$$

Nach dem Satz von ROUCHÉ besitzt demnach das Polynom

$$f_{n_{k-1}}(z) = f_{n_k}(z) - \alpha_{n_k} u_{n_k}(z)$$

keine Nullstelle im Bereich $D_B(z) \leq S_{1k-1}$. Dies ist ein Widerspruch zur Induktionsannahme.

Es sei nun $q \geq 2$. Wäre die durch (6.2) gegebene Schranke für $k \geq \kappa$ falsch, so gäbe es ein Polynom $f_{n_k}(z)$ das den Voraussetzungen unseres Satzes genügt und höchstens $q-1$ Nullstellen im Bereich $D_B(z) \leq S_{qk}$ besitzt. Bezeichnen wir nun mit ξ_v ($v=1, 2, \dots, n_k$) die nach ihrer Distanz geordneten Nullstellen von $f_{n_k}(z)$, d.h.

$$D_B(\xi_1) \leq D_B(\xi_2) \leq \dots \leq D_B(\xi_{n_k}),$$

so folgt

$$(6.4) \quad D_B(\xi_q) > S_{qk}.$$

Wir betrachten nun den Ringstreifen

$$S_{qk-1} \leq D_B(z) \leq \frac{q+\kappa}{\kappa+1} S_{qk-1}.$$

Nach Lemma 2.1 existiert ein $\tilde{S}$ mit

$$S_{qk-1} \leq \tilde{S} \leq \frac{q+\kappa}{\kappa+1} S_{qk-1},$$

so daß für $D_B(z) = \tilde{S}$

$$\prod_{v=1}^{q-1} |z - \xi_v| \geq 2 \left(\frac{(q-1) S_{qk-1}}{4(\kappa+1)} \right)^{q-1}.$$

Unter Beachtung von (6.2) und (6.4) bekommt man auf der Kurve $D_B(z) = \tilde{S}$

$$|f_{n_k}(z)| > |\lambda_{n_k} a_{n_k}| z^{\left(\frac{(q-1) S_{qk-1}}{4(k+1)}\right)^{q-1}} \left(\frac{M_{n_k}\left(\frac{q+k}{k+1} S_{qk-1}\right)}{2 S_{qk-1}} \right) \left(\frac{4(k+1)}{q-1}\right)^{q-1} S_{qk-1}^{n_k-q+1},$$

also

$$|f_{n_k}(z)| > |\lambda_{n_k} a_{n_k}| M_{n_k}\left(\frac{q+k}{k+1} S_{qk-1}\right).$$

Außerdem gilt auf eben dieser Kurve nach dem Maximumprinzip der Funktionentheorie

$$|a_{n_k} u_{n_k}(z)| \leq |\lambda_{n_k} a_{n_k}| M_{n_k}(\tilde{S}) \leq |\lambda_{n_k} a_{n_k}| M_{n_k}\left(\frac{q+k}{k+1} S_{qk-1}\right).$$

Da das Polynom $f_{n_k}(z)$ höchstens $q-1$ Nullstellen im Bereich $D_B(z) \leq \tilde{S}$ besitzt, so gilt dies nach dem Satz von ROUCHÉ auch für das Polynom

$$f_{n_{k-1}}(z) = f_{n_k}(z) - a_{n_k} u_{n_k}(z).$$

Dies ist ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung. Damit ist Satz 6.1 vollständig bewiesen.

Bemerkung. Ist $\tilde{M} = \{u_n(z)\}$ ein SW-System mit einer Abschätzung (B, a, b) , so kann man die durch (6.1) und (6.2) gegebenen Schranken (durch Vergrößerung) leicht vereinfachen. Dann gilt nämlich

$$(6.5) \quad M_v(\rho) \leq (a\rho + b)^v \quad (v = 1, 2, \dots).$$

Setzt man

$$(6.6) \quad \tilde{S}_{1k} := (a+1)^k r + \frac{(a+1)^k - 1}{a} b$$

und definiert für $q > 1$ rekursiv

$$(6.7) \quad \tilde{S}_{qk} := \frac{q+k}{k+1} \tilde{S}_{qk-1} \left(1 + \frac{k+1}{q+k} \left(\frac{1}{2} \left(a \frac{q+k}{k+1} + \frac{b}{\tilde{S}_{qk-1}} \right)^k \left(\frac{4(k+1)}{q-1} \right)^{q-1} \right)^{\frac{1}{n_k-q+1}} \right)$$

($k = 1, 2, \dots, k$)

mit dem Anfangswert

$$\tilde{S}_{q_0} := \tau,$$

dann folgt auch

$$S(q, n_1, n_2, \dots, n_k, \tau, \tilde{\omega}) \leq \tilde{S}_{q_k}.$$

Schließlich formulieren wir noch gesondert den Spezialfall, daß das vorgelegte Polynom keine "Lücken" besitzt. Wir haben dazu nur n_k durch $p+k$ zu ersetzen und bekommen den

Satz 6.2. Es sei $\tilde{\omega} = \{u_n(z)\}$ ein Polynomsystem und

$$f_n(z) = a_0 u_0(z) + a_1 u_1(z) + \dots + a_n u_n(z)$$

ein Polynom vom Grade n . Besitzt das Polynom

$$f_p(z) = a_0 u_0(z) + a_1 u_1(z) + \dots + a_p u_p(z) \quad \text{mit } p \leq n$$

wenigstens q Nullstellen im Bereich $D_B(z) \leq \tau$ ($\tau > 0$), so besitzt das Polynom $f_n(z)$ wenigstens q Nullstellen in einem Bereich

$$D_B(z) \leq S(q, p, n, \tau, \tilde{\omega}).$$

Mit dem Anfangswert

$$S_{q_0} := \tau \quad (q \geq 1)$$

sei rekursiv definiert

$$(6.8) \quad S_{q+k} := S_{q+k-1} + M_{p+k} (S_{q+k-1})^{\frac{1}{p+k}}$$

und für $q > 1$

$$(6.9) \quad S_{q+k} := S_{q+k-1} \left(\frac{q+k}{k+1} + \left(\frac{M_{p+k} \left(\frac{q+k}{k+1} S_{q+k-1} \right)}{2 S_{q+k-1}^{p+k}} \left(\frac{k(k+1)}{q-1} \right)^{q-1} \right)^{\frac{1}{p+k-q-1}} \right)$$

$$(k=1, 2, \dots, n-p);$$

dann gilt

$$S(q, p, n, \tau, \tilde{\omega}) \leq S_{q+n-p}.$$

Hierbei hat $M_v(p)$ ($v = 1, 2, \dots$) dieselbe Bedeutung wie im Satz 6.1.

7. Das Landau - Montelsche Problem

Wir wollen nun das für die Taylor-Entwicklung eines Polynoms bekannte Landau - Montelsche Problem (siehe z.B. [13]) auf allgemeinere Entwicklungen ausdehnen.

Es sei $\tilde{u} = \{u_n(z)\}$ ein Polynomsystem. Das Polynom

$$f_0(z) = a_0 u_0(z) + a_1 u_1(z) + \dots + a_p u_p(z)$$

besitze mindestens q ($q \leq p$) Nullstellen in einem beschränkten Bereich B_0 . Unter dem Landau - Montelschen Problem vom Typus $\langle q, f_0(z), k \rangle$ bezüglich $\tilde{u}$ wollen wir die folgende Aufgabe verstehen:

Man bestimme einen beschränkten Bereich $B(B_0, q, k, \tilde{u})$, der nur von B_0 , dem System $\tilde{u}$ sowie von den natürlichen Zahlen q und k abhängt und mindestens q Nullstellen jedes Polynoms

$$f(z) = f_0(z) + a_{n_1} u_{n_1}(z) + a_{n_2} u_{n_2}(z) + \dots + a_{n_k} u_{n_k}(z)$$

$$(p < n_1 < n_2 < \dots < n_k)$$

enthält.

Für das Folgende führen wir eine abkürzende Bezeichnung ein.

Es seien τ, α, b reelle Zahlen mit $\tau > 0$, $\alpha \geq 1$, $b \geq 0$ und q, k natürliche Zahlen. Dann bezeichnen wir mit $R(\tau, \alpha, b, q, k)$ für $q \geq 2$ die nach folgender Vorschrift be-

rechnet numerische Konstante

$$(7.1) \quad \begin{cases} R_{q_0} := \tau, \\ R_{q_k} := R_{q_{k-1}} \left(\frac{q+k}{k+1} \right) \left(1 + (a^{q+k} z^{q-3})^{\frac{1}{k+1}} \exp \left(1 + \frac{b}{a R_{q_{k-1}}} \right) \right) \\ \quad (\kappa = 1, 2, \dots, k), \\ R(\tau, a, b, q, k) := R_{q_k} \end{cases}$$

und für $q = 1$ die Konstante

$$(7.2) \quad R(\tau, a, b, 1, k) := (a+1)^k \tau + \frac{(a+1)^k - 1}{a} b.$$

Satz 7.1. Das Landau - Montelsche Problem vom Typus $\langle q, f_0(z), k \rangle$ bezüglich eines SW-Systems $\tilde{w} = \{u_n(z)\}$ ist lösbar.

Ist (B, a, b) eine Abschätzung für $\tilde{w}$, und besitzt das Polynom

$$f_0(z) = a_0 u_0(z) + a_1 u_1(z) + \dots + a_p u_p(z)$$

wenigstens q Nullstellen im Bereich $D_B(z) \leq \tau$ ($\tau > 0$), so besitzt das Polynom

$$f(z) = f_0(z) + a_{m_1} u_{m_1}(z) + a_{m_2} u_{m_2}(z) + \dots + a_{m_k} u_{m_k}(z)$$

wenigstens q Nullstellen im Bereich

$$D_B(z) \leq R(\tau, a, b, q, k)$$

(vergl. (7.1) und (7.2)). Für $q > 1$ besteht die Ungleichung

$$(7.3) \quad \begin{cases} R(\tau, a, b, q, k) \leq \frac{\tau}{k+1} \left(\frac{q+k}{k} \right)^k \\ \quad \times \prod_{\kappa=1}^k \left(1 + (a^{q+\kappa} z^{q-3})^{\frac{1}{\kappa+1}} \exp \left(\left(1 - \frac{b}{(a+1)^{\kappa-1} (\tau+a+b)} \right)^{-1} \right) \right) \end{cases}$$

Beweis. Wir gehen von Satz 6.1 und der daran anschließenden Bemerkung aus. Im Falle $q=1$ stimmt $R(\tau, a, b, q, k)$ mit der durch (6.6) gegebenen Schranke überein.

Zur Behandlung des Falles $q > 1$ verwenden wir (6.7) und setzen

$$C := \frac{\kappa+1}{q+\kappa} \left(\frac{1}{2} \left(a \frac{q+\kappa}{\kappa+1} + \frac{b}{\tilde{S}_{q\kappa-1}} \right)^{n_{\kappa}} \left(\frac{4(\kappa+1)}{q-1} \right)^{q-1} \right)^{\frac{1}{n_{\kappa}-q+1}}.$$

Da $n_{\kappa} \geq p+\kappa \geq q+\kappa$, bekommt man

$$\begin{aligned} C &= 2^{\frac{2q-3}{n_{\kappa}-q+1}} \left(\frac{q+\kappa}{\kappa+1} \right)^{\frac{q-1}{n_{\kappa}-q+1}} \left(\frac{\kappa+1}{q-1} \right)^{\frac{q-1}{n_{\kappa}-q+1}} a^{\frac{n_{\kappa}}{n_{\kappa}-q+1}} \left(1 + \frac{(\kappa+1)b}{(q+\kappa)a \tilde{S}_{q\kappa-1}} \right)^{\frac{n_{\kappa}}{n_{\kappa}-q+1}} \\ &\leq \left(2^{2q-3} a^{q+\kappa} \right)^{\frac{1}{n_{\kappa}+1}} \left(1 + \frac{\kappa+1}{q-1} \right)^{\frac{q-1}{n_{\kappa}+1}} \left(1 + \frac{b}{a \tilde{S}_{q\kappa-1}} \frac{\kappa+1}{q+\kappa} \right)^{\frac{q+\kappa}{n_{\kappa}+1}}. \end{aligned}$$

Anwendung der bekannten Ungleichung

$$(7.4) \quad \left(1 + \frac{x}{y} \right)^y \leq e^x \quad \text{für } x \geq 0, y > 0$$

ergibt

$$C \leq \left(2^{2q-3} a^{q+\kappa} \right)^{\frac{1}{n_{\kappa}+1}} \exp \left(1 + \frac{b}{a \tilde{S}_{q\kappa-1}} \right).$$

Damit gewinnt man aus (6.7) die Ungleichung

$$\tilde{S}_{q\kappa} \leq \frac{q+\kappa}{\kappa+1} \tilde{S}_{q\kappa-1} \left(1 + \left(2^{2q-3} a^{q+\kappa} \right)^{\frac{1}{n_{\kappa}+1}} \exp \left(1 + \frac{b}{a \tilde{S}_{q\kappa-1}} \right) \right).$$

Nun sieht man sofort ein, daß die unter (7.1) aufgeführte Schranke $R(\tau, a, b, q, k)$ die im Satz 7.1 angegebene Eigenschaft besitzt. Um schließlich (7.3) zu beweisen, gewinnen wir zunächst aus (7.1) mit Hilfe von (7.4) die Ungleichung

$$R_{q\kappa} \geq (e+1)R_{q\kappa-1} + \frac{b}{a}e \geq (e+1)^{\kappa} + \frac{b}{a}((e+1)^{\kappa}-1).$$

Somit gilt

$$\exp\left(1 + \frac{b}{a R_{q^{k-1}}}\right) \leq \exp\left(\frac{a(e+1)^{k-1} + b(e+1)^{k-1}}{a(e+1)^{k-1} + b((e+1)^{k-1} - 1)}\right).$$

Aus (7.1) bekommt man nun die Ungleichung (7.3). Damit ist Satz 7.1 bewiesen.

Wegen der zentralen Bedeutung des Satzes 7.1 für diese Arbeit formulieren wir noch einen Spezialfall unter Vermeidung der Begriffe des schwachen Wachstums und der Distanzfunktion.

Satz 7.1*. Es sei $\tilde{u} = \{u_n(z)\}$ ein Polynomsystem, dessen Polynome alle ihre Nullstellen im Kreisbereich $|z| < \rho$ besitzen. Liegen dann wenigstens q Nullstellen des Polynoms

$$f_0(z) = \alpha_0 u_0(z) + \alpha_1 u_1(z) + \dots + \alpha_p u_p(z)$$

im Kreisbereich $|z| \leq r$, so liegen wenigstens q Nullstellen jedes Polynoms

$$f(z) = f_0(z) + \alpha_{n_1} u_{n_1}(z) + \alpha_{n_2} u_{n_2}(z) + \dots + \alpha_{n_k} u_{n_k}(z)$$

$$(p < n_1 < n_2 < \dots < n_k)$$

im Kreisbereich

$$|z| \leq R(r, 1, \rho, q, k)$$

(vergl. (7.1), (7.2)).

Beweis. Nach Satz 3.1 ist $\tilde{u}$ ein SW-System mit einer Abschätzung $(0, 1, \rho)$. Damit folgt Satz 7.1* aus Satz 7.1.

Wir benutzen später die folgende Variante von Satz 7.1.

Satz 7.2. Es sei $\tilde{u} = \{u_n(z)\}$ ein SW-System mit einer Abschätzung (γ, α, b) , wobei $\gamma \in \mathbb{C}$. Für $k+1$ natürliche Zahlen n_k ($k = 0, 1, \dots, k$) mit

$$0 \leq p \leq n_0 < n_1 < \dots < n_k$$

sei r der Radius eines Kreises mit Mittelpunkt γ , der p Nullstellen von jedem der Polynome $u_{n_k}(z)$ ($k=0,1,\dots,k$) umschließt. Dann liegen mindestens p Nullstellen jedes Polynoms

$$f(z) = a_0 u_{n_0}(z) + a_1 u_{n_1}(z) + \dots + a_k u_{n_k}(z)$$

im Kreisbereich

$$|z-\gamma| \leq R(r, \alpha, b, p, k).$$

Ferner darf gesetzt werden

$$(7.5) \quad r = 1 + \left(3^{\frac{1}{6}} (\alpha + b) \right)^p.$$

Beweis. Sind alle Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_k$ gleich Null, so ist $f(z)$ das Nullpolynom, und die Aussage unseres Satzes ist sicher richtig.

Ist a_k der erste von Null verschiedene Koeffizient, so haben wir mit

$$f_0(z) := a_k u_{n_k}(z)$$

ein Landau - Montelsches Problem vom Typus $\langle p, f_0(z), k-k \rangle$ vorliegen. Nach Satz 7.1 liegen dann mindestens p Nullstellen von $f(z)$ im Kreisbereich

$$|z-\gamma| \leq R(r, \alpha, b, p, k-k).$$

Offensichtlich wird der Radius dieses Kreisbereichs am größten, wenn $k=0$.

Da (γ, α, b) eine Abschätzung für $\tilde{w}$ ist, gilt

$$\max_{|z-\gamma| \leq 1} \sqrt[n_k]{|f_0(z)|} \leq \alpha + b.$$

Nach Satz 4.2 folgt damit, daß jedes der Polynome $u_{n_k}(z)$ ($k=0,1,\dots,k$) wenigstens p Nullstellen im Kreisbereich

$$|z - \gamma| \leq 1 + \left(3^{\frac{1}{p}} (\alpha + b)\right)^p$$

besitzt. Damit ist alles bewiesen.

Als Korollar gewinnen wir eine Aussage über die Werteverteilung von rationalen Funktionen.

Korollar 7.1. Die Polynome $P(z)$ und $Q(z)$ mögen einem SW-System mit einer Abschätzung (γ, α, b) ($\gamma \in \mathbb{C}$) angehören. Ferner seien die Grade von $P(z)$ und $Q(z)$ größer oder gleich p , und es werde r durch (7.5) gegeben. Dann nimmt die rationale Funktion

$$R(z) := \frac{P(z)}{Q(z)}$$

im Kreisbereich

$$|z - \gamma| \leq R(r, \alpha, b, p, 1)$$

jeden Wert mindestens p -mal an.

Beweis. Enthält ein Kreisbereich K für beliebige komplexe Zahlen α_0 und α_1 mindestens p Nullstellen des Polynoms

$$f(z) = \alpha_0 P(z) + \alpha_1 Q(z),$$

so nimmt die rationale Funktion $R(z)$ in K jeden Wert mindestens p -mal an. Nach Satz 7.2 bekommen wir damit das Korollar.

MONTEL [10] und BALLIEU [2] haben gezeigt, daß für p Nullstellen eines Polynoms der Gestalt

$$f(z) = g(z) + h(z) (\alpha_1 z^{n_1} + \alpha_2 z^{n_2} + \dots + \alpha_k z^{n_k})$$

$$(p \leq \partial g < \partial h), (n_1 < n_2 < \dots < n_k)$$

Schranken existieren, die nur von den Koeffizienten der Polynome $g(z)$ und $h(z)$ sowie von k abhängen. Es ist jedoch bisher nur in Spezialfällen gelungen, diese Schranken numerisch

anzugeben. Mit Hilfe von Satz 7.1 erreichen wir hierzu einen Fortschritt.

Satz 7.3. Es seien $g(z)$ und $h(z)$ komplexe Polynome mit $\rho = \partial g < \partial h$; weiter sei $0 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_k$ eine beliebige Reihe von k ganzen Zahlen. Dann gibt es für jede Anzahl $q \leq \rho$ eine nur von den Koeffizienten der Polynome $g(z)$ und $h(z)$ sowie von k abhängige Schranke $S_q = S_q(g(z), h(z), k)$, derart daß der Kreisbereich $|z| \leq S_q$ wenigstens q Nullstellen jedes Polynoms

$$f(z) = g(z) + h(z)(a_1 z^{m_1} + a_2 z^{m_2} + \dots + a_k z^{m_k})$$

enthält.

Sind alle Nullstellen der Polynome $g(z)$ bzw. $h(z)$ dem Betrage nach kleiner als τ_1 bzw. τ_2 , so gilt

$$S_q(g(z), h(z), k) \leq R(\tau_1, 1, \tau_2, q, k).$$

Beweis. Mit $\ell := \partial h$ definieren wir

$$u_n(z) := \begin{cases} z^n & \text{für } n = 0, 1, \dots, \ell-1, \\ h(z) z^{n-\ell} & \text{für } n = \ell, \ell+1, \dots \end{cases}$$

Nach Satz 3.1 ist $\{u_n(z)\}$ ein SW-System mit einer Abschätzung $(0, 1, \tau_2)$. Für den weiteren Beweis haben wir nur Satz 7.1 anzuwenden.

VAN VLECK [16] und MONTEL [11] haben gezeigt, daß man im Falle der Taylor-Entwicklung eines Polynoms auch Schranken für q ($q \leq \rho$) Nullstellen bekommen kann, wenn man nur die ersten ρ Koeffizienten, einen beliebigen weiteren sowie die

Anzahl der Terme fixiert. Diesem Ergebnis entsprechend beweisen wir den

Satz 7.4. Es sei $\tilde{u} = \{u_n(z)\}$ ein SW-System mit einer Abschätzung (ζ, a, b) , wobei $\zeta \in \mathbb{C}$. Für das Polynom

$$f(z) = a_0 u_0^*(z) + a_1 u_1^*(z) + \dots + a_{p-1} u_{p-1}^*(z) + \dots + a_{p+h} u_{p+h}^*(z) + \\ + a_{n_1} u_{n_1}^*(z) + a_{n_2} u_{n_2}^*(z) + \dots + a_{n_k} u_{n_k}^*(z)$$

gelte $h \geq 0$, $a_{p+h} \neq 0$ und $p+h < n_1 < n_2 < \dots < n_k$. Weiter sei für $0 \leq q \leq p$

$$\tau := 1 + \left(3^{\frac{1}{b}} (a+b)^p \left(h+1 + \sum_{\mu=0}^{p-1} \left| \frac{a_\mu}{a_{p+h}} \right| \right) \right)^{\frac{1}{p-q+1}}$$

Dann besitzt $f(z)$ wenigstens q Nullstellen im Kreisbereich

$$|z - \zeta| \leq R(\tau, a, b, q, k+h).$$

Beweis. Es sei τ der kleinste Index größer als $p-1$, so daß $|a_\tau| \geq |a_{p+h}|$. Damit folgt

$$p \leq \tau \leq p+h.$$

Es bezeichne weiter $u_{n_\nu}(\zeta)$ ($\nu = 0, 1, \dots, n$) die Koeffizienten der Taylor-Entwicklung des Polynoms $u_n^*(z)$ im Punkte ζ . Das Polynom

$$f_\tau(z) := \sum_{\mu=0}^{\tau} a_\mu u_\mu^*(z)$$

besitzt dann die Taylor-Entwicklung

$$f_\tau(z) = \sum_{\nu=0}^{\tau} \left(\sum_{\mu=\nu}^{\tau} a_\mu u_{\mu\nu}(\zeta) \right) (z - \zeta)^\nu =: \sum_{\nu=0}^{\tau} b_\nu (z - \zeta)^\nu.$$

Nach Lemma 4.1 folgt

$$|u_{\mu\nu}(\zeta)| \leq (a+b)^\mu.$$

Damit bekommen wir

$$|b_v| \leq \sum_{\mu=v}^{\tau} |\alpha_{\mu}| (a+b)^{\mu} \leq (a+b)^{\tau} \sum_{\mu=0}^{\tau} |\alpha_{\mu}|$$

$$(v = 0, 1, \dots, \tau-1).$$

Außerdem gilt

$$b_{\tau} = a_{\tau}.$$

Nach Lemma 4.2 besitzt $f_{\tau}(z)$ wenigstens q Nullstellen im Kreisbereich

$$|z - \gamma| \leq \left(1 + \tau \left(\frac{(a+b)^{\tau}}{|\alpha_{\tau}|} \sum_{\mu=0}^{\tau} |\alpha_{\mu}|^2 \right)^{\frac{1}{2(\tau-q+1)}} \right)$$

$$\leq 1 + \left(3^{\frac{1}{2}} (a+b)^p \left(h+1 + \sum_{\mu=0}^{p-1} \left| \frac{\alpha_{\mu}}{\alpha_{p+h}} \right| \right) \right)^{\frac{1}{p-q+1}} = r.$$

Dabei hängt der Wert von r nicht mehr von τ ab. Das Problem, Schranken für q Nullstellen des Polynoms $f(z)$ zu finden, führt nunmehr auf ein Landau - Montelsches Problem vom Typus $\langle q, f_{\tau}(z), p+h-\tau+k \rangle$. Nach Satz 7.1 liegen daher wenigstens q Nullstellen im Kreisbereich

$$|z - \gamma| \leq R(\tau, \alpha, b, q, p+h-\tau+k).$$

Offensichtlich wird der Radius dieses Kreisbereichs am größten, wenn $\tau = p$. Damit ist Satz 7.4 bewiesen.

Schließlich geben wir noch einen Satz für rationale Funktionen an.

Satz 7.5. Es seien $\mathcal{W} = \{u_n(z)\}$ und $\mathcal{V} = \{v_n(z)\}$ SW-Systeme mit einer gemeinsamen Abschätzung (B, a, b) . Die Polynome des Systems $\mathcal{V}$ seien paarweise teilerfremd. Schließlich setzen wir

$$u_{-n}(z) := \frac{1}{v_n(z)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Besitzt die rationale Funktion

$$r_0(z) := \sum_{\mu=-m}^p a_{\mu} u_{\mu}(z) \quad (p \geq -m)$$

mindestens q Nullstellen in einem Bereich $D_B(z) \leq p$, so besitzt die rationale Funktion

$$r(z) = r_0(z) + a_{n_1} u_{n_1}(z) + a_{n_2} u_{n_2}(z) + \dots + a_{n_k} u_{n_k}(z)$$

$$(p < n_1 < n_2 < \dots < n_k)$$

mindestens q Nullstellen im Bereich

$$D_B(z) \leq R(p, a, b, q, k).$$

Beweis. Es sei

$$w(z) := \prod_{\substack{\mu > 0 \\ a_{-\mu} \neq 0}} v_{\mu}(z)$$

und i der Grad von $w(z)$. Multiplizieren wir $r(z)$ mit $w(z)$, so bekommen wir ein Polynom der Gestalt

$$f(z) = r(z)w(z) = a_{-m} w_{i-m}(z) + a_{-m+1} w_{i-m+1}(z) + \dots + a_p w_{i+p}(z) + \\ + a_{n_1} w_{i+n_1}(z) + a_{n_2} w_{i+n_2}(z) + \dots + a_{n_k} w_{i+n_k}(z),$$

wobei die hier auftretenden Polynome $w_{\nu}(z)$ einem SW-System mit einer Abschätzung (B, a, b) angehören. Da die Polynome des Systems w paarweise teilerfremd sind, stimmen die Nullstellen von $f(z)$ mit den Nullstellen von $r(z)$ überein. Anwendung von Satz 7.1 liefert damit den Satz 7.5.

8. Vergleich mit Ergebnissen von MARDEN

Für die Taylor-Entwicklung eines Polynoms werden die in den letzten Abschnitten durchgeführten Untersuchungen besonders einfach. Wir wollen für diesen Spezialfall unsere Methoden mit den „klassischen“ Methoden vergleichen.

Die einfachsten Beweise des Landau - Montelschen Problems bezüglich der Taylor-Entwicklung sind Induktionsbeweise, die nach folgendem Verfahren verlaufen:

Ausgehend vom Polynom

$$f_{pk}(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p + a_{n_1} z^{n_1} + a_{n_2} z^{n_2} + \dots + a_{n_k} z^{n_k}$$

bildet man

(a) das reziproke Polynom

$$\hat{f}_{pk}(z) = z^{n_k} f_{pk}\left(\frac{1}{z}\right),$$

(b) differenziert dieses Polynom nach z (dadurch fällt a_{n_k} weg)

$$\hat{F}_{pk-1}(z) = \frac{d}{dz} \hat{f}_{pk}(z)$$

(c) und bildet wieder das reziproke Polynom

$$F_{pk-1}(z) = z^{n_{k-1}} \hat{F}_{pk-1}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Das Polynom $F_{pk-1}(z)$ genügt dann (bis auf bekannte Faktoren) der Induktionsannahme.

Während bei den Schritten (a) und (c) die Nullstellen jeweils in die reziproken übergehen, ist bei Schritt (b) die Beziehung zu den ursprünglichen Nullstellen weniger einfach

zu erfassen. MONTEL [10] bekommt an dieser Stelle nur qualitative Aussagen mit Hilfe des Zweikreisesatzes von WALSH, während MARDEN [3] hier das Lemma von KAKEYA benutzt. Die Schritte (a), (b) und (c) beschränken die Methode auf Polynome, die als Taylor-Entwicklung gegeben sind.

Demgegenüber verläuft das in dieser Arbeit benutzte Verfahren völlig „ableitungsfrei“. Außer Addition oder Subtraktion eines Terms werden keine Operationen an den Polynomen vorgenommen. Stattdessen werden die Schwierigkeiten in den Argumentbereich gelegt. Dort wird mit vier geschlossenen Kurven gearbeitet, von denen eine so bestimmt wird, daß der Satz von ROUCHÉ angewendet werden kann. Bei der näherungsweisen Ermittlung dieser Kurve spielt das mehr aus der Approximationstheorie gewonnene Lemma 2.1 eine entscheidende Rolle.

Beachten wir, daß das System $\{z^n\}$ durch das Tripel $(0,1,0)$ abgeschätzt wird, so liefert Satz 7.1 den

Satz 8.1. Für je zwei natürliche Zahlen p und k gibt es eine Konstante $\psi(p,k)$ mit der folgenden Eigenschaft:

Liegen die Nullstellen des Polynoms

$$f_p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p$$

vom Grade p im Kreisbereich $|z| \leq r$, so liegen mindestens p Nullstellen jedes Polynoms

$$f(z) = f_0(z) + a_{n_1} z^{n_1} + a_{n_2} z^{n_2} + \dots + a_{n_k} z^{n_k}$$

$$(p < n_1 < n_2 < \dots < n_k)$$

im Kreisbereich

$$|z| \leq r \psi(p,k).$$

Dabei gilt

$$(8.1) \quad \psi(p, k) \leq \Phi_1(p, k) := \begin{cases} \frac{1}{k+1} \binom{p+k}{k} \prod_{\kappa=1}^k \left(1 + e^{\frac{2p-3}{\kappa+1}}\right) & \text{für } p \geq 2, \\ 2^k & \text{für } p = 2. \end{cases}$$

Wie BIERNACKI [3] gezeigt hat, gilt für die optimale Schranke

$$(8.2) \quad \psi(p, k) = \binom{p+k}{k}.$$

Deshalb ist unsere Schranke $\Phi_1(p, k)$ nur im Falle $p = k = 1$ optimal. Für $p = 1$ wurde übrigens unsere Schranke 2^k bereits von SARANTOPOULOS (siehe [10], S.6) auf rein elementarem Weg gewonnen.

MARDEN [9] gibt folgende Schranken an:

$$(8.3) \quad \psi(p, k) \leq \Phi_2(p, k) := \binom{p+k}{k} \left(\operatorname{cosec} \frac{\pi}{2p} \right)^k$$

und

$$(8.4) \quad \psi(p, k) \leq \Phi_3(p, k) := \prod_{\kappa=1}^k \prod_{\nu=0}^{p-1} \left(1 + \frac{p}{\kappa+\nu} \right).$$

Mit Hilfe einer elektronischen Rechananlage wurden die Werte der Schranken $\Phi_\nu(p, k)$ ($\nu = 1, 2, 3$) im Bereich $2 \leq p \leq 20$, $1 \leq k \leq 280$ berechnet. Es zeigt sich dabei, daß es für jedes ν (p, k)-Bereiche gibt, in denen die betreffende Schranke $\Phi_\nu(p, k)$ präziser als die anderen beiden Schranken ist (siehe Fig. 1).

Für große Werte von k können sich die einzelnen Schranken sehr stark unterscheiden. Für $p = 20$ und $k = 280$ gilt z.B.

$$\Phi_1(p, k) \approx 1,83 \cdot 10^{238}, \quad \Phi_2(p, k) \approx 2,37 \cdot 10^{340}, \quad \Phi_3(p, k) \approx 9,32 \cdot 10^{489}.$$

Vergleich verschiedener Schranken im Bereich

$$2 \leq p \leq 20$$

$$1 \leq k \leq 280$$

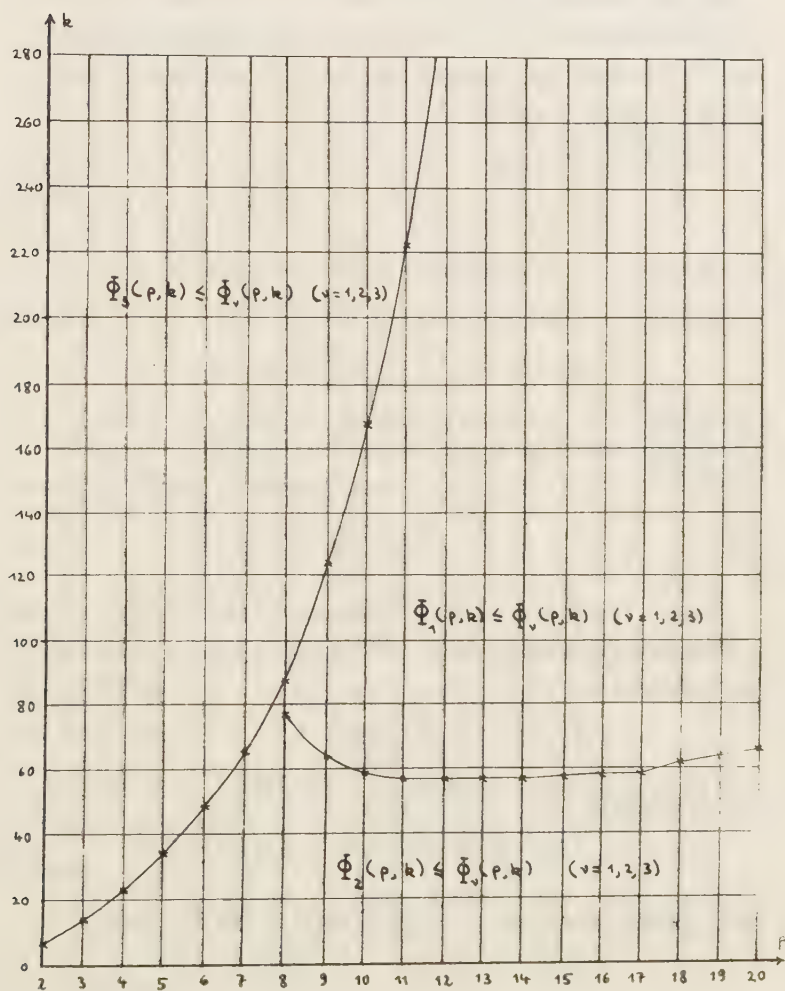


Fig. 1

Demgegenüber gilt für die optimale Schranke von BIERNACKI

$$\Psi(20, 280) = \binom{300}{280} < 8,14 \cdot 10^{30}.$$

Bei den Beweisen von MARDEN spielt das Lemma von KAKEYA eine entscheidende Rolle. Wir wollen nun umgekehrt versuchen, einen Satz zu gewinnen, der bei unserem Beweis eine analoge Aufgabe erfüllt.

Besitzt das Polynom

$$f(z) = a_1 + a_2 z + \dots + a_n z^{n-1}$$

höchstens $p-2$ Nullstellen in einem Kreisbereich $|z| \leq r$, so besitzt das Polynom

$$\hat{f}(z) = a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n$$

mindestens $n-p+1$ Nullstellen im Kreisbereich $|z| \leq \frac{1}{r}$.

Setzen wir

$$(8.5) \quad \chi(\kappa) := \begin{cases} 2 & \text{für } \kappa = 1, \\ \frac{\kappa+1}{2} \left(1 + e^{2\frac{\kappa-1}{2}}\right) & \text{für } \kappa > 1, \end{cases}$$

so liegen nach Satz 8.1 auch mindestens $n-p+1$ Nullstellen des Polynoms

$$\hat{F}(z) = a_0 z^n + \hat{f}(z)$$

im Kreisbereich

$$|z| \leq \frac{1}{r} \quad \Psi(n-p+1, 1) \leq \frac{1}{r} \chi(n-p+1).$$

Somit liegen höchstens $p-1$ Nullstellen des Polynoms

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

im Kreisbereich

$$|z| \leq \frac{r}{\chi(n-p+1)}.$$

Damit haben wir den

Satz 9.2. Besitzt das Polynom

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

vom Grad n mindestens p Nullstellen im Kreisbereich $|z| \leq r$,
so besitzt das Polynom

$$f(z) = a_1 + a_2 z + \dots + a_n z^{n-1}$$

mindestens $p-1$ Nullstellen im Kreisbereich

$$|z| \leq r \chi(n-p+1) \quad (\text{vergl. (8.5)}).$$

Anders als im Lemma von KAKEYA werden hier anstelle der
Ableitung $F'(z)$ Aussagen über die Nullstellen des Polynoms

$$f(z) := \frac{F(z) - F(0)}{z}$$

gemacht. Während nach dem bekannten Satz von GAUSS - LUCAS
jeder Kreisbereich, der alle Nullstellen des Polynoms $F(z)$
enthält, auch alle Nullstellen der Ableitung $F'(z)$ enthält,
gilt hier das

Korollar 8.1. Liegen alle Nullstellen des Polynoms $F(z)$
im Kreisbereich $|z| \leq r$, so liegen alle Nullstellen des
Polynoms

$$f(z) = \frac{F(z) - F(0)}{z}$$

im Kreisbereich $|z| \leq 2r$.

Die Konstante 2 kann dabei durch keine kleinere ersetzt werden, wie das Beispiel $F(z) = (z - r)^2$ zeigt.

Der Satz 8.2 gestattet noch einige Folgerungen, die im Zusammenhang mit der Werteverteilung stehen.

Korollar 8.2. Es sei α eine beliebige komplexe Zahl. Besitzt das Polynom $F(z)$ vom Grade n mindestens p α -Stellen im Kreisbereich $|z| \leq r$, so besitzt das Polynom

$$f(z) := \frac{F(z) - F(\alpha)}{z - \alpha}$$

mindestens $p-1$ Nullstellen im Kreisbereich

$$|z| \leq r \chi(n-p+1).$$

Korollar 8.3. Besitzt das Polynom $f(z)$ vom Grade n höchstens p ($0 \leq p < n$) Nullstellen im Kreisbereich $|z| \leq r$, so ist das Polynom

$$F(z) := z f(z)$$

im Kreisbereich

$$|z| \leq \frac{r}{\chi(n-p)}$$

höchstens $p+1$ -wertig; d.h. $F(z)$ nimmt in diesem Kreisbereich jeden komplexen Wert höchstens $p+1$ -mal an.

9. Anwendungen auf ein Problem von BIERNACKI

BIERNACKI [3] hat das folgende Problem aufgeworfen:

Es sei $F(z)$ ein Polynom, dessen Nullstellen in einem

Kreisbereich K liegen. Weiter seien

$$a_v(z, t_1, t_2, \dots, t_k) \quad (v = 0, 1, \dots, n)$$

Polynome in z , die von den k komplexen Parametern $t_1, t_2, \dots, t_k$ abhängen. Kann man dann beschränkte Bereiche angeben, die unabhängig von den Parametern $t_1, t_2, \dots, t_k$ stets eine gewisse Mindestanzahl von Nullstellen des Polynoms

$$f(z, t_1, t_2, \dots, t_k) := \sum_{v=0}^n a_v(z, t_1, t_2, \dots, t_k) F^{(v)}(z)$$

enthalten?

Dieses Problem, das bisher nur in Spezialfällen gelöst worden ist, wollen wir mit Hilfe der Untersuchungen von Abschnitt 7 allgemein behandeln. Es gilt der folgende Satz, der das Problem von BIERNACKI enthält.

Satz 9.1. Es sei $f(z, t_1, t_2, \dots, t_k)$ ein Polynom in z , das von den k komplexen Parametern $t_1, t_2, \dots, t_k$ abhängt. Es existiere eine Darstellung

$$(9.1) \quad f(z, t_1, t_2, \dots, t_k) = \sum_{v=0}^n g_v(t_1, t_2, \dots, t_k) u_v(z, t_1, t_2, \dots, t_k)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $g_v(t_1, t_2, \dots, t_k)$ sind Funktionen der komplexen Parameter $t_1, t_2, \dots, t_k$ und hängen nicht von z ab.
- (ii) $u_v(z, t_1, t_2, \dots, t_k)$ sind Polynome in z , deren Grade paarweise verschieden und mindestens gleich $p > 0$ sind und deren Koeffizienten von $t_1, t_2, \dots, t_k$ abhängen.
- (iii) Die Polynome $u_v(z, t_1, t_2, \dots, t_k)$ gehören unabhängig von $t_1, t_2, \dots, t_k$ einem SW-System mit einer Abschätzung (γ, a, b) ($\gamma \in \mathbb{C}$) an ⁶.

Ist τ der Radius eines Kreises mit Mittelpunkt γ der minde-

stens p Nullstellen von jedem der Polynome $u_v(z, t_1, t_2, \dots, t_k)$ ($v = 0, 1, \dots, n$) einschließt, so besitzt $f(z, t_1, t_2, \dots, t_k)$ mindestens p Nullstellen im Kreisbereich

$$|z - \gamma| \leq R(r, \alpha, b, p, n).$$

Ferner darf gesetzt werden

$$r = 1 + \left(3^{\frac{1}{6}} (\alpha + b) \right)^p.$$

Man gewinnt diesen Satz direkt aus Satz 7.2. Wird durch die Funktionen

$$\tau_v = g_v(t_1, t_2, \dots, t_k) \quad (v = 0, 1, \dots, n)$$

eine Abbildung des $\mathbb{C}^k$ auf den $\mathbb{C}^{n+1}$ vermittelt, so können die Voraussetzungen des Satzes 9.1 im allgemeinen nicht abgeschwächt werden. Dann sind nämlich die Größen τ_v selbst freie Parameter. Andernfalls bestehen zwischen den Größen τ_v Abhängigkeiten, die wir beim Beweis mit Hilfe von Satz 7.2 nicht ausnutzen. Bei der erfolgreichen Anwendung von Satz 9.1 kommt es darauf an, eine geeignete Darstellung (9.1) zu finden.

Beispiel. Es sei

$$\begin{aligned} f(z, t_1, t_2, t_3) = & t_1 + \sin |t_1| z + t_1 z^2 + \\ & + (2 + \sin |t_2|) t_1 z^{n_1} + t_3 z^{n_2} \end{aligned}$$

($2 < n_1 < n_2$).

Dies ist bereits eine Darstellung der Gestalt (9.1), jedoch ist $p = 0$, und wir bekommen keine Aussage über Nullstellen.

Formen wir um zu

$$f(z, t_1, t_2, t_3) = \sin |t_1| z + t_1 (1 + z^2) + (2 + \sin |t_2|) t_1 z^{n_1} + t_3 z^{n_2},$$

so wird

$$u_0(z) = z, \quad u_1(z) = 1 + z^2, \quad u_2(z) = z^{n_1}, \quad u_3(z) = z^{n_2},$$

und Satz 9.1 garantiert wenigstens eine Nullstelle im Kreisbereich

$$|z| \leq R(1, 1, 1, 1, 3).$$

Schreiben wir dagegen

$$f(z, t_1, t_2, t_3) = t_1 \left(1 + \frac{\sin |t_1|}{t_1} z + z^2 \right) + (2 + \sin |t_2|) t_1 z^{n_1} + t_3 z^{n_2},$$

so wird ⁷⁾

$$u_0(z, t_1) = \left(1 + \frac{\sin |t_1|}{t_1} z + z^2 \right),$$

$$u_1(z) = z^{n_1}, \quad u_2(z) = z^{n_2}.$$

Da die Nullstellen dieser Polynome im Kreisbereich

$$|z| \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} =: r$$

liegen, liegen mindestens zwei Nullstellen des Polynoms

$f(z, t_1, t_2, t_3)$ im Kreisbereich

$$|z| \leq R(r, 1, r, 2, 2).$$

Schließlich können wir auch umformen zu

$$\begin{aligned} f(z, t_1, t_2, t_3) &= t_1 (2 + \sin |t_2|) \left(\frac{1}{2 + \sin |t_2|} + \frac{\sin |t_1|}{t_1 (2 + \sin |t_2|)} z + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^2}{2 + \sin |t_2|} + z^{n_1} \right) + t_3 z^{n_2} \\ &=: t_1 (2 + \sin |t_2|) u_0(z, t_1, t_2) + t_3 z^{n_2}. \end{aligned}$$

Da die Nullstellen des Polynoms $u_0(z, t_1, t_2)$ dem Betrage nach kleiner als 2 sind, besitzt $f(z, t_1, t_2, t_3)$ für jede Anzahl $p \leq n_1$ mindestens p Nullstellen im Kreisbereich

$$|z| \leq R(2, 1, 2, p, 1).$$

In dieser letzten Darstellung sind die Parameter

$$\tau_0 := t_1(2 + \sin |t_2|) \quad \text{und} \quad \tau_1 := t_3$$

unabhängig.

Satz 9.1 bzw. Satz 7.2 lassen sich auf eine Reihe von Problemen der Analytischen Theorie der Polynome anwenden.

Satz 9.2 (Lemma von Kakeya).

Besitzt das Polynom $f(z)$ vom Grade n mindestens p ($p > 1$) Nullstellen im Kreisbereich $|z| \leq r$, so besitzt die Ableitung $f'(z)$ mindestens $p-1$ Nullstellen in einem Kreisbereich

$$|z| \leq r \varphi(n, p).$$

Dabei ist $\varphi(n, p)$ eine nur von n und p abhängende Konstante, und es gilt

$$(9.2) \quad \varphi(n, p) \leq R(1, 1, 1, p-1, n-p).$$

Im Beweis verwenden wir einen Satz von BALLIEU [2], den wir als Lemma angeben.

Lemma 9.1. Es sei $f(z)$ ein Polynom vom Grade n , und es sei α eine reelle Zahl mit $\alpha \neq n$. Liegen alle Nullstellen des Polynoms $f(z)$ im Kreisbereich $|z| \leq r$, so liegen alle Nullstellen des Polynoms $z f'(z) - \alpha f(z)$ im Kreisbereich

$$|z| \leq r \max\left(1, \frac{\alpha}{\alpha - n}\right).$$

Für den Beweis von Satz 9.2 ist es keine Beschränkung der

Allgemeinheit, wenn wir $\tau = 1$ annehmen. Bezeichnen wir mit $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ die Nullstellen von $f(z)$, so gelte also $|\xi_v| < 1$ ($v = 1, 2, \dots, p$). Setzen wir

$$g(z) = \prod_{v=1}^p (z - \xi_v) \quad \text{und} \quad h(z) = \prod_{v=p+1}^n (z - \xi_v) =: \sum_{v=0}^{n-p} \tau_v z^v,$$

so gilt

$$f^{*'}(z) = g(z)h'(z) + g'(z)h(z) = \sum_{v=0}^{n-p} \tau_v z^{v-1} (v g(z) + z g'(z)).$$

Nach Lemma 9.1 liegen die Nullstellen der Polynome

$$u_v(z) = z^{v-1} (v g(z) + z g'(z)) \quad (v = 0, 1, \dots, n-p)$$

im Einheitskreis. Damit folgt Satz 9.2 aus Satz 9.1.

Von den bekannten Schranken von BIERNACKI

$$(9.3) \quad \varphi(n, p) \leq \prod_{v=1}^{n-p} \frac{n+v}{n-v}$$

und von MARDEN

$$(9.4) \quad \varphi(n, p) \leq \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2(n-p+1)}$$

(siehe z.B. [13], S.65) für das Lemma von KAKEYA ist jedoch die letztere immer besser als die Schranke (9.2).

Als Folgerung aus Satz 9.1 gewinnen wir leicht einen bekannten Satz von DIEUDONNÉ [4]. Während in diesem Satz bisher nur die Existenz von Schranken garantiert wurde, können wir numerische Werte angeben.

Satz 9.3. Bestehen zwischen den Koeffizienten eines komplexen Polynoms

$$f(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v$$

vom Grade n die linearen Beziehungen

$$(9.5) \quad c_{\lambda_0} a_0 + c_{\lambda_1} a_1 + \dots + c_{\lambda_n} a_n = 0 \quad (0 \leq \lambda < p \leq n)$$

mit von Null verschiedener erster Determinante $\det |c_{\lambda\mu}|_0^{p-1}$, so existiert eine nur von den Koeffizienten $c_{\lambda\mu}$ abhängige Schranke $S(c_{\lambda\mu})$, derart daß der Kreisbereich $|z| \leq S(c_{\lambda\mu})$ mindestens p Nullstellen des Polynoms $f(z)$ enthält.

Sind $d_{\lambda\kappa}$ die Lösungen der (stets lösbaren) Matrixengleichung

$$(9.6) \quad \sum_{\lambda=0}^{p-1} c_{\nu\lambda} d_{\lambda\kappa} = c_{\nu, p+\kappa} \\ (\nu = 0, 1, \dots, p-1), \quad (\kappa = 0, 1, \dots, n-p),$$

und ist $|z| \leq \tau$ ein Kreisbereich, der alle Nullstellen der Polynome

$$u_\nu(z) := z^\nu - \sum_{\mu=0}^{p-1} d_{\mu, \nu-p} z^\mu \\ (\nu = p, p+1, \dots, n)$$

enthält, z.B.

$$(9.7) \quad |z| \leq \tau := \max_{0 \leq \kappa \leq n-p} \left(1 + \sum_{\lambda=0}^{p-1} |d_{\lambda\kappa}|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

so gilt

$$S(c_{\lambda\mu}) \leq R(\tau, 1, \tau, p, n-p).$$

Beweis. Da die Determinante $\det |c_{\lambda\mu}|_0^{p-1}$ von Null verschieden ist, besitzt die Matrixengleichung (9.6) eine eindeutig bestimmte Lösungsmatrix $(d_{\lambda\kappa})$. Man rechnet leicht nach, daß $f(z)$ folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$f(z) = a_p u_p(z) + a_{p+1} u_{p+1}(z) + \dots + a_n u_n(z).$$

Nach einem bekannten Satz wird durch (9.7) eine Schranke für die Beträge der Nullstellen aller Polynome $u_v(z)$ gegeben. Alles übrige folgt aus Satz 9.1.

Bemerkung. Besitzt das Polynom $f(z)$ die Gestalt

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{p-1} z^{p-1} + a_p z^{k_0} + a_{p+1} z^{k_1} + \dots + a_n z^{k_n}$$

$$(p \leq k_0 < k_1 < \dots < k_n),$$

und bestehen für die Koeffizienten a_v die linearen Beziehungen (9.5), so bekommt man in entsprechender Weise Schranken für p Nullstellen, die nicht vom Grad von $f(z)$ abhängen.

Der Satz 9.3 besitzt Anwendungen, die in den Ideenkreis der Kompositionssätze führen.

Aus den Polynomen

$$f(z) = \sum_{v=0}^n (v) a_v z^v \quad \text{und} \quad g(z) = \sum_{v=0}^n (v) b_v z^v$$

vom Grade n bilde man das Polynom

$$h(z) = \sum_{v=0}^n (v) a_v b_v z^v.$$

Kennt man dann Schranken für alle Nullstellen des Polynoms $f(z)$ und Schranken für alle Nullstellen des Polynoms $g(z)$, so kann man daraus bekanntlich Schranken für alle Nullstellen des Polynoms $h(z)$ bestimmen (siehe z.B. [13], S.70). Kennt man dagegen Schranken für nur p ($p < n$) Nullstellen von $f(z)$, so ist es im allgemeinen nicht möglich, Schranken für wenigstens p Nullstellen von $h(z)$ anzugeben. Besitzt z.B. $f(z)$ die Nullstelle 1, d.h.

$$(9.8) \quad \sum_{v=0}^n (\eta) \alpha_v = 0,$$

und ist $g(z)$ das Polynom $g(z) := 1 + z^n$, so können alle Nullstellen des Polynoms

$$h(z) = \alpha_0 + \alpha_n z^n$$

beliebig großen Betrag annehmen, ohne daß die Bedingung (9.8) verletzt wird.

Es seien nun b_v ($v = 0, 1, \dots, n$) komplexe Zahlen mit $b_v \neq 0$ für $0 < v \leq n$. Weiter sei

$$f(z) = \sum_{v=0}^n \alpha_v z^v$$

ein Polynom vom Grade n , das im Einheitskreis die p Nullstellen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ besitzt. Dann genügen die Koeffizienten von $f(z)$ den linearen Beziehungen

$$(9.9) \quad \sum_{v=0}^n \alpha_v \xi_\mu^v = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, p).$$

Diesen Gleichungen wollen wir durch gewisse Umformungen eine andere Gestalt geben.

Für eine komplexwertige Funktion $\eta(\zeta)$ und für paarweise verschiedene Punkte ζ_i ($i = 1, 2, \dots$) definieren wir mit $\eta_i := \eta(\zeta_i)$

$$(9.10) \quad \begin{cases} \Delta^0 \eta_i := \eta_i, \\ \Delta^\kappa \eta_i := \frac{\Delta^{\kappa-1} \eta_i - \Delta^{\kappa-1} \eta_\kappa}{\zeta_i - \zeta_\kappa} \quad (i > \kappa). \end{cases}$$

Durch vollständige Induktion beweist man leicht die folgenden Eigenschaften:

- (1) $\Delta^\kappa \eta_i^\lambda$ ($i > \kappa$) ist für $\lambda > \kappa$ ein ganzrationaler homogener

Ausdruck in den Größen $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\kappa, \gamma_i$ vom Grade $\lambda - \kappa$ und mit Koeffizienten vom Betrag 1.

$$(ii) \quad \Delta^\kappa \gamma_i^\kappa = 1 \quad (i > \kappa),$$

$$(iii) \quad \Delta^\kappa \gamma_i^\lambda = 0 \quad (i > \kappa) \quad \text{für } \lambda < \kappa.$$

Sind die p im Einheitskreis gelegenen Nullstellen des Polynoms $f(z)$ paarweise verschieden, so kann man durch Linearkombinationen von der Form (9.10) das Gleichungssystem (9.9) auf die folgende Gestalt bringen

$$(9.11) \quad \begin{cases} a_0 + a_1 \Delta^0 \xi_1^p + \dots + a_p \Delta^0 \xi_1^p + \dots + a_n \Delta^0 \xi_1^n = 0, \\ a_1 + \dots + a_p \Delta^1 \xi_2^p + \dots + a_n \Delta^1 \xi_2^n = 0, \\ \dots \\ a_{p-1} + a_p \Delta^{p-1} \xi_p^p + \dots + a_n \Delta^{p-1} \xi_p^n = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen bleiben aus Stetigkeitsgründen auch noch richtig, wenn gewisse der Nullstellen ξ_λ einander gleich sind. Definiert man rekursiv die Größen

$$(9.12) \quad \begin{cases} d_{p-1, v} := \Delta^{p-1} \xi_p^{p+v}, \\ d_{\kappa v} := -\Delta^\kappa \xi_{\kappa+1}^{p+v} + \sum_{\mu=\kappa+1}^{p-1} d_{\mu v} \Delta^\kappa \xi_{\mu+1}^p \\ (\kappa = p-2, p-3, \dots, 0), \quad (v = 0, 1, \dots, n-p), \end{cases}$$

so liefert (9.11)

$$(9.13) \quad a_\mu = - \sum_{v=0}^{n-p} a_{p+v} d_{\mu v} \quad (\mu = 0, 1, \dots, p-1).$$

Betrachten wir nun das Polynom

$$h(z) := \sum_{v=0}^n a_v b_v z^v =: \sum_{v=0}^n c_v z^v \quad !$$

Zwischen den Koeffizienten c_ν bestehen die p linearen Beziehungen

$$(9.14) \quad c_\mu = - \sum_{\nu=0}^{n-p} c_{p+\nu} d_{\mu\nu} \frac{b_\mu}{b_{p+\nu}} \quad (\mu = 0, 1, \dots, p-1).$$

Bezeichnet σ den Radius eines Kreises um den Nullpunkt, der alle Nullstellen der Polynome

$$(9.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_\nu(z) := z^{p+\nu} - \sum_{\mu=0}^{p-1} g_{\mu\nu} z^\mu \quad \text{mit} \quad g_{\mu\nu} := d_{\mu\nu} \frac{b_\mu}{b_{p+\nu}} \\ (v = 0, 1, \dots, n-p) \end{array} \right.$$

einschließt, so folgt nach Satz 9.3, daß $h(z)$ mindestens p Nullstellen im Kreisbereich

$$|z| \leq R(\sigma, 1, \sigma, p, n-p)$$

besitzt.

Die Größen $g_{\mu\nu}$ hängen, wie man mit Hilfe von (9.12) sieht, noch von den Nullstellen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ ab. Man überlegt sich aber leicht, daß

$$|\Delta^\kappa \xi_i^\mu| \leq \binom{\mu}{\kappa}$$

und gewinnt aus (9.12) die Ungleichungen

$$(9.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} |d_{p-1,v}| \leq \binom{p+v}{p-1}, \\ |d_{\kappa v}| \leq \binom{p+v}{\kappa} + \sum_{\mu=\kappa+1}^{p-1} |d_{\mu v}| \binom{\mu}{\kappa} \\ (\kappa = p-2, p-3, \dots, 0), \quad (v = 0, 1, \dots, n-p). \end{array} \right.$$

Erklären wir nun für die ganzzahlige Variable v Polynome $e_\kappa(v)$ vom Grad κ durch die Rekursionsgleichung

$$(9.17) \quad e_\kappa(v) = 1 + \sum_{\mu=1}^{\kappa} \binom{v+\kappa+1}{\mu} e_{\kappa-\mu}(v) \quad \text{mit} \quad e_0(v) = 1,$$

so gilt für die Koeffizienten der Polynome (9.15) unter Beachtung von (9.16)

$$(9.18) \quad \begin{cases} |g_{\mu\nu}| \leq \left| \frac{b_\mu}{b_{\mu+\nu}} \right| \binom{p+\nu}{\mu} e_{p-1-\mu}(\nu) \\ (\nu = 0, 1, \dots, n-p), (\mu = 0, 1, \dots, p-1). \end{cases}$$

Diese Schranken für die Koeffizienten der Polynome (9.15) hängen nicht mehr von der speziellen Lage der Nullstellen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ im Einheitskreis ab. Mit Hilfe bekannter Sätze kann man damit zu vorgegebenem $p > 0$ eine nur von n und den Koeffizienten $b_0, b_1, \dots, b_n$ abhängende obere Schranke $\sigma_p = \sigma_p(n, b_0, b_1, \dots, b_n)$ für die Beträge aller Nullstellen der Polynome (9.15) angeben. Damit haben wir den

Satz 9.4. Es seien b_ν ($\nu = 0, 1, \dots, n$) komplexe Zahlen mit $b_\nu \neq 0$ für $0 < p \leq \nu \leq n$. Weiter bezeichne

$$\sigma_p = \sigma_p(n, b_0, b_1, \dots, b_n)$$

eine obere Schranke für die Beträge aller Nullstellen der Polynome (9.15) mit den Nebenbedingungen (9.17) und (9.18).²⁾

Besitzt dann das Polynom

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

vom Grade n mindestens p Nullstellen im Kreisbereich $|z| \leq r$, so besitzt das Polynom

$$h(z) = a_0 b_0 + a_1 b_1 z + \dots + a_n b_n z^n$$

mindestens p Nullstellen im Kreisbereich:

$$|z| \leq r R(\sigma_p, 1, \sigma_p, p, n-p).$$

Als Anwendung dieses Satzes gewinnen wir ein Korollar, das gewissermaßen eine Umkehrung des Lemmas von KAKEYA darstellt.

Korollar 9.1. Es sei $f(z)$ ein Polynom vom Grade n , das mindestens p Nullstellen im Kreisbereich $|z| \leq r$ besitzt und λ eine beliebige komplexe Zahl. Dann gibt es eine nur von p und von n abhängende Konstante $\Omega(p, n)$, derart daß das Polynom

$$F(z) := \int_{\lambda}^z f(t) dt$$

im Kreisbereich $|z| \leq r \Omega(p, n)$ mindestens einen Wert mindestens $p+1$ -mal annimmt. $\Omega(p, n)$ kann mit den Methoden von Satz 9.4 abgeschätzt werden.

Beweis. Besitzt das Polynom $f(z)$ im Kreisbereich $|z| \leq r$ mindestens p Nullstellen, so besitzt dort das Polynom $z f(z)$ mindestens $p+1$ Nullstellen. Multiplizieren wir die Taylor-Entwicklung des letzteren Polynoms gliedweise mit den Zahlen $b_v := \frac{1}{v}$ ($v = 1, 2, \dots, n+1$), so bekommen wir das Polynom

$$h(z) := F(z) - F(0).$$

Nach Satz 9.4 besitzt $h(z)$ mindestens $p+1$ Nullstellen im Kreisbereich

$$|z| \leq r R(\sigma_p, 1, \sigma_p, p+1, n-p),$$

wobei $\sigma_p = \sigma_p(n+1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+1}) =: \sigma_p(n)$ wie in Satz 9.4 abgeschätzt werden kann. Also nimmt das Polynom $F(z)$ zumindest den Wert $F(0)$ in einem Kreisbereich der Form

$$|z| \leq r \Omega(p, n)$$

mindestens $p+1$ - mal an.

Schließlich sei noch auf folgende Anwendungsmöglichkeit von Satz 9.3 hingewiesen.

Besitzt ein Polynom $f(x)$ vom Grade n die p verschiedenen Nullstellen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$, so gilt für die Ableitung

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$$

$$0 = \int_{\xi_\mu}^{\xi_p} f'(x) dx = \sum_{v=0}^{n-1} a_v \frac{\xi_p^{v+1} - \xi_\mu^{v+1}}{v+1} \quad (\mu = 1, 2, \dots, p-1).$$

Die Koeffizienten von $f'(x)$ erfüllen also einfache lineare Beziehungen, und wir können mit Hilfe von Satz 9.3 Aussagen über wenigstens $p-1$ Nullstellen machen. Natürlich kann man auch mit den Methoden von Satz 9.2 die exakte Kenntnis einiger Nullstellen von $f(x)$ zur Eingrenzung gewisser Nullstellen von $f'(x)$ ausnutzen. Beide Wege sind jedoch nicht identisch.

Fußnoten

1) Vergl. P. TURÁN, Sur l'algèbre fonctionnelle. Comptes Rendus du prem. Congr. des Math. Hongr. 1950, 279-290.
—, Hermite-expansion and strips of zeros of polynomials. Arch. der Math. 5, 148-152 (1954). W. SPECHT, Die Lage der Nullstellen eines Polynoms, I, II, III, IV, Math. Nachr. 15, 353-374 (1956); 16, 257-263 (1957); 16, 369-389 (1957); 21, 201-222 (1960).

R. VERMES hat für Entwicklungen nach Polynomen, deren Nullstellen in einem beschränkten Bereich liegen, Nullstellenschranken vom Cauchyschen Typus angegeben. Vergl. Pacific J. Math. 19, 553-559 (1966).

2) Seite 7: Ein ähnliches Problem behandelt FEKETE [7]. Wir übernehmen für diesen Beweis die dort verwendeten Methoden.

3) Seite 10: Dieses Lemma ist eine Verallgemeinerung eines in [12] angegebenen Lemmas.

4) Seite 12: Die Funktion $|\alpha_n^*(z)|$ beschreibt eine 3-dimensionale (reelle) Fläche über der komplexen Ebene $\mathbb{C}$. Eine Kurve C_n mit den gewünschten Eigenschaften gewinnt man etwa durch Projektion der vom Punkt $(z_0, |\alpha_n^*(z_0)|)$ dieser Fläche ausgehenden Falllinie (Kurve des stärksten Abstiegs) in die Ebene $\mathbb{C}$.

5) Seite 21: Vergl. a.a.O. ¹⁾).

6) Seite 49: Das heißt, für $|x-y| \leq r$ und alle k -Tupel $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in \mathbb{C}^k$ soll gelten

$$|u_v(x, t_1, t_2, \dots, t_k)|^{\frac{1}{2^{u_v}}} \leq a + b$$

$$(v = 0, 1, \dots, n).$$

7) Seite 51: Für $t_1 = 0$ definieren wir etwa

$$\frac{\sin |t_1|}{t_1} := i \quad (\text{imaginäre Einheit}).$$

Dann besitzt

$$u_0(x, t_1) := \left(1 + \frac{\sin |t_1|}{t_1} x + x^2 \right)$$

für $t_1 = 0$ eine Nullstelle vom Betrag $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

8) Seite 59: Man gewinnt aus (9.17) leicht die Abschätzung

$$e_{\kappa}(v) \leq 2^{\kappa} (\kappa + v + 1)^{\kappa} \quad \text{für } v \geq 0 \quad \text{und } \kappa \geq 0.$$

Damit bekommt man anstelle von (9.18)

$$|g_{\mu\nu}| \leq \left| \frac{b_{\mu}}{b_{\mu+\nu}} \right| (p+\nu) \binom{p+\nu}{\mu} (2(p+\nu-\mu))^{p-1-\mu}$$

$$(v = 0, 1, \dots, n-p), (\mu = 0, 1, \dots, p-1).$$

Setzt man

$$C := \max_{\substack{0 \leq \mu \leq p-1 \\ 0 \leq v \leq n-p}} \left| \frac{b_{\mu}}{b_{\mu+v}} \right|,$$

so liefert eine bekannte Nullstellenschranke

$$\sigma_p(n, b_0, b_1, \dots, b_n) \leq 1 + C \frac{2^n}{\sqrt{n}} (2n)^{p-1}.$$

Literatur

- [1] ACHIESER, N.I.: Vorlesungen über Approximationstheorie.
Berlin: Akademie Verlag 1953.
- [2] BALLIEU, R.: Limitations en module et localisations des
zéros des polynomes. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège (IV)
1, 85-191 (1936).
- [3] BIERNACKI, M.: Sur les équations algébriques contenant
des paramètres arbitraires. Thèse, Bull. Acad. Polo-
naise, série A 1927, 541-685.
- [4] DIEUDONNÉ, J.: La théorie analytique des polynomes d'
une variable (à coefficients quelconques). Memorial
des sci. math. fasc. 93, Paris 1938.
- [5] FEJÉR, L.: Über die Lage der Nullstellen von Polynomen,
die aus Minimumsforderungen gewisser Art entspringen.
Math. Ann. 85, 41-48 (1922).
- [6] FEKETE, M.: Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen
algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizien-
ten. Math. Z. 17, 228-249 (1923).
- [7] FEKETE, M.: Über den absoluten Betrag von Polynomen,
welche auf einer Punktmenge gleichmäßig beschränkt
sind. Math. Z. 26, 324-344 (1927).
- [8] MARDEN, M.: A note on lacunary polynomials. Bull. Amer.
Math. Soc. 49, 546-549 (1948).

- [9] MARDEN, M.: The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable. Math. Surveys Vol. 3, Amer. Math. Soc., New York 1949.
- [10] MONTEL, P.: Les modules des zéros des polynomes. Ann. Ec. norm. sup. (3) 40, 1-34 (1923).
- [11] MONTEL, P.: Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynomes. Comment. Math. Helv. 7, 178-200 (1934/35).
- [12] SCHMEISSER, G.: Erweiterung eines Satzes von J. Korevaar. Math. Z. 98, 185-191 (1967).
- [13] SPECHT, W.: Algebraische Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften I1. 2. Aufl. Heft 3, II, Stuttgart: Teubner 1958.
- [14] SZEGÖ, G.: Über einen Satz von A. Markoff. Math. Z. 23, 45-61 (1925).
- [15] SZEGÖ, G.: Orthogonal polynomials. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 23, revised edition, New York 1959.
- [16] VAN VLECK, E.B.: On limits of the absolute values of the roots of a polynomial. Bull. Soc. Math. France 53, 105-125 (1925).

Lebenslauf

Am 8. Juni 1939 wurde ich, Helmut Gerhard Christof Schmeißer, als jüngstes von zwei Kindern des Sparkassenoberamtmanns Karl Schmeißer und seiner Ehefrau Magda, geb. Tschinkl, in Selb (Bayern) geboren.

Von 1945 bis 1949 besuchte ich die Volksschule in Selb und trat dann in die dortige Oberrealschule über, wo ich im Juli 1958 die Reifeprüfung ablegte.

Im Wintersemester 1958/59 begann ich das Studium der Mathematik und Physik an der Universität Erlangen - Nürnberg. Im Herbst 1961 legte ich die Vorprüfung für das Staatsexamen und 1964 das Hauptexamen ab.

Anschließend übernahm ich am Mathematischen Institut der Universität Erlangen - Nürnberg die Verwaltung einer wissenschaftlichen Assistentenstelle. Seit November 1966 bin ich als wissenschaftlicher Assistent an diesem Institut tätig.

Offsetdruck - Fotodruck

Josef Hogl

8520 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz.) Tel. 22990

Offsetdruck - Fotodruck

- J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Telefon 22990 -